DEVOIR SURVEILLE 4

Exo I. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on définit la fonction f_n sur [0,1] en posant :

$$f_n(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{nt^2}\mathrm{d}t - \int_x^1 \mathrm{e}^{-nt^2}\mathrm{d}t \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

1. Dans cette question $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé
   a. Prouver que f_n est dérivable sur [0,1] et calculer $f_n'(x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$.
   b. Prouver que $f_n(1) > 0$ et que $f_n(0) < 0$
   c. Montrer qu'il existe un unique $c_n \in]0,1[$ tel que

$$\int_0^{c_n} \mathrm{e}^{nt^2}\mathrm{d}t = \int_{c_n}^1 \mathrm{e}^{-nt^2}\mathrm{d}t$$

   Dans le reste de l'exercice, on étudie la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ ainsi construite
2. a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$.
   b. En déduire que la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ est monotone
   c. Montrer que la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un nombre L de [0,1].
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$, on pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{nt^2}\mathrm{d}t$
   a. Montrer que $I_n(c_n) \leqslant 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$, montrer que $I_n(x) \geqslant x + n\frac{x^3}{3}$
   c. A l'aide de ce qui précède, déterminer $L = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n$

Exo II. SCILAB

1. Ecrire un script demandant à un utilisateur de deviner un nombre entier x secret, connu de l'ordinateur.
   On pourra demander un entier n à l'utilisateur et afficher « gagné » s'il a trouvé ou recommencer sinon.
2. Ecrire la matrice $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{100}{101}\right)$ à l'aide des opérateurs pointés
3. Que fait ce script :

```
for n = 1:100
  ok = %T // Vrai
  for j = 2:sqrt(n)
     if n == j * floor(n/j) then
       ok = %F // Faux
     end
  end
  if ok then
    disp(n)
  end
end
```

Exo III. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $J(k,n) = \displaystyle\int_0^1 x^k(1-x)^n \mathrm{d}x$.

1. a. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $J(k,0)$ et $J(k,1)$.

   b. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, montrer que $J(k+1,n) = \dfrac{k+1}{n+1} J(k,n+1)$

2. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, établir l'égalité

$$J(k,n) = \frac{n!}{(k+1)(k+2)\cdots(k+n+1)}$$

3. Le but de cette question est de simplifier la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{2k+1}$.

   a. Calculer $\displaystyle\int_0^1 t^{2k} \mathrm{d}t$ et en déduire que $S_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t$.

   b. En utilisant le résultat de la question (2), établir que

$$S_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{n-k} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$$

   c. Montrer l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{n+1+k}$

   d. En déduire que $S_n = \dfrac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$

Exo IV. **D'après Ecricome.** Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on pose

$$f(x,y,z) = (-2x - y + 2z, -15x - 6y + 11z, -14x - 6y + 11z)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que $V = \{X \in \mathbb{R}^3 : f(X) = X\}$ est un espace vectoriel et justifier que V possède une base constituée d'un vecteur que l'on notera $\vec{u}$
4. Déterminer $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, de dernière composante est nulle, tel que $f(\vec{v}) = \vec{v} + \vec{u}$.
5. Déterminer $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$de dernière composante valant 1, tel que $f(\vec{w}) = \vec{w} + \vec{v}$.
6. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
7. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et en donner une base. Que peut-on en déduire pour f ?
8. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et en donner une base. Que peut-on en déduire pour f ?
9. On pose $P = \begin{pmatrix} a & e & h \\ b & f & i \\ c & g & j \end{pmatrix}$ pour $\vec{u} = (a,b,c)$, $\vec{v} = (e,f,g)$ et $\vec{w} = (h,i,j)$.

   a. Justifier que la matrice P est inversible et donner son inverse P^{-1}

   b. Déterminer l'unique matrice T telle que $A = PTP^{-1}$.

Exo V. **Edhec.** Un mobile se déplace sur un axe d'origine O. Au départ, il est à l'origine (d'abscisse 0). Le mobile se déplace selon la règle suivante : S'il est à l'abscisse k à l'instant n, il sera l'instant suivant à l'abscisse $k+1$ avec la probabilité $\frac{k+1}{k+2}$ ou à l'abscisse 0 avec la probabilité $\frac{1}{k+2}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse du mobile à l'instant n et on pose $u_n = P(X_n = 0)$

PARTIE 1 : étude de la variable X_n

1. Vérifier que $X_1(\Omega) = \{0{,}1\}$ puis donner la loi de X_1
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer par récurrence que $X_n(\Omega) = \{0{,}1, \cdots, n\}$
3. a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, \cdots, n\}$, établir que $P(X_n = k) = \frac{k}{k+1} P(X_{n-1} = k-1)$.

   b. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0,n]\!]$ montrer que $P(X_n = k) = \frac{1}{k+1} u_{n-k}$

   c. En remarquant que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1$ montrer que
   $$\sum_{j=0}^{n} \frac{u_j}{n-j+1} = 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

   d. Retrouver ainsi les valeurs de u_0 et u_1 puis déterminer u_2 et u_3.
4. a. En remarquant que la relation obtenue à la question 3a) peut s'écrire sous la forme
   $$(k+1)P(X_n = k) = kP(X_{n-1} = k-1)$$
   Montrer que $E(X_n) - E(X_{n-1}) = u_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

   b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire une expression de $E(X_n)$ sous forme de somme mettant en jeu certains termes de la suite (u_n);

   c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner la valeur de $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j}$ et vérifier que
   $$u_n + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j+1} = 1$$
   Déduire de ces deux résultats que
   $$u_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{(n-j)(n-j+1)} \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

   d. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $u_n \geqslant \frac{1}{n+1}$. Déterminer ensuite $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n)$

PARTIE 2 : Etude du premier retour à l'origine

On note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ)

1. a. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ exprimer l'événement $(T = k)$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables X_i

   b. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $P(T = k) = \frac{1}{k(k+1)}$

   c. Déterminer les constantes a et b telles que

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} \qquad (k \in \mathbb{N}^*)$$

d. En déduire que $\lim\limits_{N \to +\infty} P(T \geqslant N) = 0$ puis interpréter ce résultat

e. Etablir que $\ln(1+x) \leqslant x$ pour $x \geqslant 0$ puis que

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k} \qquad (k \geqslant 1)$$

2. Etudier la convergence de la suite définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} kP(T = k)$ pour $n \geqslant 1$

PARTIE 3 : Scilab

1. Compléter les deux blancs pour que le script suivant calcule et affiche $u_1, \cdots, u_{100}$ ainsi que l'espérance de X_{100} qui sera stockée dans e.

```
u = zeros(1, 101) // une matrice ligne pour stocker u(0)...u(100)
u(1,1) = 1  // u(0)
e = 0
for k=1:100
  s = 0
  for j = 0:k-1
     s = s + ______
  end
  u(1, k + 1) = 1 - s  // u(k)
  disp(u(1, k + 1))
  e = _____
end
disp(e)
```