DEVOIR SURVEILLE 5

Exo I. 1. On considère la fonction g définie par $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2\ln(x)$ pour $x > 0$.

a. Dresser le tableau de variation complet de g

b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0, +\infty[$ et vérifier que $\alpha > 1$.

c. Déterminer le signe de g

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$ pour $x > 0$.

a. Dresser le tableau de variation complet de f (en fonction de α)

b. Déterminer le signe de f sur $]0, +\infty[$.

3. On pose $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t$

a. Déterminer l'ensemble de définition de F, puis le signe de F.

b. Justifier que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et dresser son tableau de variations

4. Etude de F en 0

a. On pose $u(0) = 1$ et $u(x) = \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x}$ pour $x > 0$. Montrer que la fonction u est continue sur $[0, +\infty[$.

b. Pour $x > 0$, montrer que $F(x) = \mathrm{Arctan}(x)\ln(x) - \displaystyle\int_1^x u(t)\mathrm{d}t$

c. En déduire que F se prolonge par continuité en 0 avec la valeur $U = \int_0^1 u(t)\mathrm{d}t$.

5. Valeur approchée de U.

a. Pour $x > 0$ et $k \in \mathbb{N}$, calculer $I_k(x) = \int_1^x t^k \ln(t)\mathrm{d}t$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$, montrer que $\displaystyle\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$

c. Pour $0 < x < 1$, montrer alors que $\displaystyle F(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x) + (-1)^{n+1}\int_1^x \frac{t^{2n+2}\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$

d. Pour $0 < x < 1$, en déduire que $\displaystyle\left|F(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)\right| \leqslant I_{2n+2}(x)$ puis que $\displaystyle\left|U - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\right| \leqslant \frac{1}{(2n+3)^2}$

e. Ecrire un programme Scilab qui affiche une valeur approchée de U à 10^{-3} près *(on pourra déterminer un entier n pour lequel $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$ est une valeur approchée de U à 10^{-3} près).*

6. Limite de F en $+\infty$.

a. A l'aide d'un changement de variable, montrer que $F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x)$ pour $x > 0$.

b. En déduire la limite de F en $+\infty$. Interprétez graphiquement.

7. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(x) = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{1+x^2t^2}\mathrm{d}t$.

a. Montrer que φ est bien définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs positives et paires

b. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, prouvez que $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant |x^2 - y^2| \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t^2\ln(t)\mathrm{d}t$. En déduire la continuité de φ sur $\mathbb{R}$.

c. Montrer que φ est décroissante sur $[0, +\infty[$.

Exo II. On considère l'application $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z)=(3x-11y-8z,3x-15y-12z,3x-13y-10z)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$
2. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$
3. Déterminer le noyau, l'image et le rang de f.

Exo III. **Partie I : étude d'un endomorphisme de polynômes** Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour $P\in\mathbb{R}[X]$, on pose

$$\varphi(P)=\frac{1}{n}X(1-X)P'+XP$$

1. a. Montrer que $\varphi:\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}[X]$ est une application linéaire
   b. Pour $k\in[\![0,n]\!]$, calculer $\varphi(X^k)$ puis préciser son degré
   c. Montrer que la restriction $\varphi:\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}_n[X]$ est un endomorphisme
2. Pour $k\in[\![0,n]\!]$, on pose $P_k=X^k(1-X)^{n-k}$.
   a. Prouver que la famille $(P_0,\ldots,P_n)$ est libre *(question difficile)*
   b. En déduire que la famille $(P_0,\ldots,P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   c. Pour $k\in[\![0,n]\!]$, montrer que $\varphi(P_k)=\left(\frac{k}{n}\right)P_k$
   d. L'application φ est elle bijective ?
3. a. Montrer que $\dim(\operatorname{Im}(\varphi))=n$.
   b. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}\varphi$.
4. Pour $k\in[\![0,n]\!]$ fixé et $j\in\mathbb{N}^*$, montrer que $\varphi^j(P_k)=\left(\frac{k}{n}\right)^jP_k$ où $\varphi^j=\underbrace{\varphi\circ\ldots\circ\varphi}_{j\text{ fois}}$.

Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires

Pour $n\geqslant 2$ fixé, on considère une urne contenant n boules indiscernables numérotées 1 à n et on y effectue dune suite de tirages avec remise.
Pour $k\in\mathbb{N}^*$, on note Y_k la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de numéros distincts qui ont été tirés lors des k premiers tirages et on pose $Y_0=0$.
Pour $k\in\mathbb{N}^*$, on note Z_k la variable aléatoire valant 1 si le $k^{\text{ième}}$ tirage amène un numéro qui n'a pas été tiré lors des tirages précédents et valant 0 sinon

On remarque que $Z_1=1$ et que l'on a $Y_k=\displaystyle\sum_{j=1}^{k}Z_j$ pour $k\in\mathbb{N}^*$ (relation (*))

5. a. Justifier que $P(Z_2=1)=\frac{n-1}{n}$ et en déduire la loi de Z_2.
   b. Ecrire une fonction scilab simulant la loi de Z_2
6. a. Soit $k\in[\![1,n]\!]$ fixé. Préciser $Y_k(\Omega)$ puis justifier que

$$P_{Y_k=j}(Z_{k+1}=1)=\frac{n-j}{n}\qquad (j\in[\![1,k]\!])$$

   b. A l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que

$$P(Z_{k+1}=1)=1-\frac{1}{n}E(Y_k)$$

c. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. A l'aide de la relation (*), montrer que

$$P(Z_{k+1} = 1) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} P(Z_j = 1)$$

d. En déduire que $P(Z_k = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}$ pour $k \in [\![1,n]\!]$.

e. Ecrire une fonction Scilab, prenant en entrée un entier n et retournant en sortie un n-uplet simulant $(Z_1, \ldots, Z_n)$

f. Pour un n fixé, écrire un script scilab simulant la loi de Y_n

7. Déterminer alors l'espérance de Y_k pour $k \in [\![1,n]\!]$

8. a. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note G_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par

$$G_k = \sum_{i=0}^{n} P(Y_k = i)X^i$$

b. En remarquant que $Y_2 = 1 + Z_2$, montrer à l'aide de II.1 que

$$G_2 = \frac{1}{n}X\big(1 + (n-1)X\big)$$

c. Déterminer les polynômes G_0 et G_1

d. Pour $k \in [\![1,n]\!]$ et $i \in [\![1,k]\!]$, montrer que

$$P(Y_{k+1} = i) = \left(\frac{i}{n}\right) P(Y_k = i) + \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) P(Y_k = i-1)$$

On admet que cette égalité reste vraie pour $k \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![0,n]\!]$.

9. a. Pour $k \in \mathbb{N}$, montrer que $G_{k+1} = \frac{1}{n}X(1-X)G_k' + XG_k$

b. Pour $k \in \mathbb{N}$, en déduire que $G_k = \varphi^k(G_0)$, avec φ application linéaire du I.

10. a. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $G_k(1)$ puis exprimer $G_k'(1)$ à l'aide de $E(Y_k)$.

b. En utilisant II.5a, montrer pour $k \in \mathbb{N}$ que

$$E(Y_{k+1}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) E(Y_k) + 1$$

c. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, retrouver alors l'expression de $E(Y_k)$ obtenue au II.3