Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x \ln(x)}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- I. étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 (*taux d'accroissement...*).
- II. Soit φ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $\varphi(x) = \ln(x) + x + 1$.
 1. étudier les variations de φ .
 2. établir que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution β .
On admettra que $0,27 \leq \beta \leq 0,28$.
 3. Pour $x > 0$, exprimer $f'(x)$ à l'aide de $\varphi(x)$.
 4. En déduire les variations de f .
- III. Déterminer la limite
 1. de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
 2. de $\ln(x) - f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- IV. Construire soigneusement les courbes représentatives $\mathcal{C}$ de f et Γ de $x \mapsto \ln(x)$ dans un repère orthonormé.