

5. Quelques sommes

- (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\sum_{k=0}^n e^{kx} = \frac{1 - e^{(n+1)x}}{1 - e^x}$ puis que $\sum_{k=0}^n e^{kx} = e^{\frac{n}{2}x} \left(\frac{\text{sh}(\frac{(n+1)x}{2})}{\text{sh}(\frac{x}{2})} \right)$.
- (b) Donner alors une formule analogue pour $\sum_{k=0}^n e^{-kx}$, avec $x \in \mathbb{R}^*$.
- (c) En déduire une formule pour $\sum_{k=0}^n \text{ch}(kx)$ ne faisant intervenir que du ch et du sh , pour $x \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 2: inspiré d'EscpT 2009

1. **Question préliminaire :**

Montrer que $\forall x \in [0, 1[, x \leq -\ln(1-x)$.

En déduire que pour tout entier naturel $k \geq 2$, $\frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$.

Puis que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n-1)$.

2. On considère la fonction f définie pour tout x de $[0, +\infty[$ par la relation : $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$.
Dresser le tableau de variations complet de f .
3. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et la relation : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$. Qu'en déduit-on ?
4. On pose, pour tout entier naturel k : $v_k = \frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}$.

(a) Exprimer v_k en fonction de u_k ; en déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $2 \leq v_k \leq 2 + \frac{1}{k}$.

(b) En calculant $\sum_{k=1}^{n-1} v_k$, montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$2(n+1) \leq \frac{1}{u_n} \leq 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

(c) A l'aide de la question préliminaire, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nu_n} = 2$

Exercice 3: inspiré d'EsIsca 95 et d'hecE 09

On étudie la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

1. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n \in \mathbb{N}$.
(b) Montrer que la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Dans toute la suite du problème, a et b ($a > b$) désignent les deux solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

2. (a) Montrer : $b = 1 - a = -\frac{1}{a}$, $1 < a < 2$, et $-1 < b < -\frac{1}{2}$.
(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$.
(c) En déduire la limite de F_n quand n tend vers $+\infty$.
3. (a) Montrer par récurrence simple et à l'aide de la définition de la suite que :
 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(F_n)^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n+1}$.
(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_{n+2}F_{n-1} - F_{n+1}F_n = (-1)^n$.

4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $u_n = \frac{F_n}{F_{n-1}}$.
(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $u_{n+2} - u_n = \frac{(-1)^n}{F_{n+1}F_{n-1}}$.
(b) En déduire les variations des suites $(u_{2n})_{n \geq 1}$ et $(u_{2n+1})_{n \geq 1}$.
(c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$.

(On pourra factoriser par a^n et a^{n-1} , respectivement au numérateur et au dénominateur de u_n).

- (d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{F_{2n}}{F_{2n-1}} \leq a \leq \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}}$
5. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta_n = F_{n+1} - aF_n$.
(a) Exprimer β_n en fonction de b et n . En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < \beta_{2n} < 1$.
(b) Rappeler l'encadrement du cours liant un réel x à sa partie entière $[x]$.
(c) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[aF_{2n}] = F_{2n+1} - 1$.

Exercice 2: ESLSCA E 99

Soit f la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$ et u la suite définie par :

$$u_0 \in [-1, +\infty[\text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

- Etudier f puis dresser son tableau de variations complet.
 - Résoudre sur $[-1, +\infty[$ l'équation $f(x) = x$ puis l'inéquation $f(x) \geq x$.
 - Tracer alors sur un même graphique la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = x$.
 - Ecrire les instructions Scilab qui permettent de faire afficher la courbe de f et celle de la droite d'équation $y = x$ sur l'intervalle $[-1, 10]$.
- On suppose dans cette question que $u_0 = 0$. Construire sur le graphique de la question 1.(c) les termes u_1 , u_2 et u_3 . Quelle conjecture peut-on émettre sur les variations et la limite de la suite u ?
 - Comment choisir u_0 pour que la suite soit constante?
 - D'après le graphique, comment suffit-il de choisir u_0 pour que u soit décroissante?
 - Y a-t-il selon vous des valeurs de u_0 pour lesquelles la suite diverge?
- On suppose désormais, et dans toute la suite de l'exercice, que $u_0 \in [-1, 1]$.
 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $-1 \leq u_n \leq 1$.
 - Déterminer la monotonie de la suite u (on pourra utiliser 1.(b)).
 - En déduire que la suite u est convergente et déterminer sa limite.
- Montrer que pour tout réel $x \geq -1$, $f(x) - 1 = \frac{x-1}{2+\sqrt{2+2x}}$.
 - En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1|$.
 - Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 1| \leq (\frac{1}{2})^{n-1}$ et retrouver la limite de la suite u .
- Montrer qu'il existe un unique $\varphi \in [0, \pi]$ tel que $u_0 = \cos(\varphi)$.
 - Rappeler la formule reliant $\cos(2x)$ et $\cos^2(x)$.
 - Montrer alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \cos(\frac{\varphi}{2^n})$ et retrouver la limite de (u_n) .
 - En admettant que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n(u_n - 1)$.

Exercice 3: inspiré d'Ecricone S 2003

On considère la suite de nombres réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + u_n^2 \quad \text{et} \quad u_0 = a, \quad a \in \mathbb{R}_+^*$$

Partie 1 : Convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- Montrer que cette suite est strictement positive et monotone.
- En raisonnant par l'absurde, montrer que la suite ne peut pas être majorée.
- En déduire la limite de la suite u .

Partie 2 : Comportement asymptotique de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $v_n = \frac{1}{2^n} \ln u_n$

- Prouver que pour tout entier n de $\mathbb{N}$: $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln(1 + \frac{1}{u_n})$.
- En déduire que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $0 < v_{k+1} - v_k \leq \frac{1}{2^{k+1}} \ln(1 + \frac{1}{a})$.
- En sommant l'encadrement précédent, montrer que $0 < v_n - v_0 \leq \ln(1 + \frac{1}{a})$.
- En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, puis qu'elle converge. On notera α sa limite.
- Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \exp(\alpha 2^n)$

On admet pour la suite de l'exercice que l'on pourrait montrer de même : $\forall n \in \mathbb{N}, \exp(\alpha 2^n) \leq u_n + 1$

- En déduire que $\frac{u_n}{\exp(\alpha 2^n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.
- On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, : $\beta_n = \exp(\alpha 2^n) - u_n$.
Montrer que la suite $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et que : $\forall n \in \mathbb{N}, 2\beta_n - 1 = (\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n) \exp(-\alpha 2^n)$
- Jusfier que $(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n) \exp(-\alpha 2^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
En déduire que $\exp(\alpha 2^n) - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$.