Devoir n°5

lundi 7 décembre 2015

Exercice 1 :

Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$ fixé, on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & \alpha & \alpha^2 \\ \frac{1}{\alpha^2} & \frac{1}{\alpha} & 0 & \alpha \\ \frac{1}{\alpha^3} & \frac{1}{\alpha^2} & \frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}$ et on note $B = \frac{1}{4}.(A + I)$ et $C = \frac{1}{4}.(3.I - A)$

où $I = I_4 =$ matrice unité de $M_4(\mathbb{R})$

1) a) Calculer A^2 . En déduire que $A^2 - 2.A = x.I$ avec x réel à préciser.

b) Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et de I.

2) a) Sans poser de produit matriciel, montrer, à l'aide de 1.a), que $B \times C = C \times B = O_4$

b) Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $B^i \times C^j = 0_4$.

c) Prouver que $B^2 = B$ et que $C^2 = C$
On admet qu'on montrerait alors par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = B$ et $C^n = C$

3) Dans cette question, on s'intéresse à A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

a) Prouver que $A = 3.B - C$

b) A l'aide de ce qui précède, exprimer A^n en fonction de n , B et C

c) Montrer que $A^n \in Vect(A, I)$.

Exercice 2 :

Dans cet exercice, $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$.

1) a) Montrer que $\forall\, k \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{k}{n}\dbinom{n}{k} = \dbinom{n-1}{k-1}$.

b) En déduire que $\forall\, x \in [0, 1]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n}\, x^k\, (1-x)^{n-k} = x$.

2) On pose $J_n = \displaystyle\int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k\, (1-x)^{n-k} \right] dx$ et $\forall\, k \in [\![0, n]\!]$, $I(k, n) = \displaystyle\int_0^1 x^k\, (1-x)^{n-k}\, dx$

a) A l'aide de 1.b), calculer J_n.

b) On admet que $\forall\, k \in [\![0, n]\!]$, $I(k, n) = \dfrac{1}{(n+1)\binom{n}{k}}$.

En utilisant cette égalité pour calculer J_n, retrouver la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$.

3) On pose $\forall\, x \in [0, 1]$, $h_n(x) = \dfrac{1}{n\,(n-1)} \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k\,(k-1)\, x^k\, (1-x)^{n-k} \right)$ et $K_n = \displaystyle\int_0^1 h_n(x)\, dx$

a) Montrer que $\forall\, k \in [\![2, n]\!]$, $\dfrac{k\,(k-1)}{n\,(n-1)} \dbinom{n}{k} = \dbinom{a}{b}$ avec a , b à exprimer en fonction de k et n

b) En déduire, pour tout $x \in [0, 1]$, l'expression de $h_n(x)$ en fonction de x

c) En calculant K_n de deux manières, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,(k-1)$ en fonction de n

d) Retrouver alors la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$

4) Dans cette question, on démontre l'égalité admise au 2.b)

On pose $\forall\, k \in [\![0,n]\!]\ ,\ I(k,n) = \displaystyle\int_0^1 x^k\,(1-x)^{n-k}\,dx$

a) A l'aide d'une intégration par partie, montrer que $\forall\, k \in [\![1,n]\!]\ ,\ I(k,n) = \left(\frac{k}{n+1-k}\right)\ I(k-1,n)$

b) En déduire que $\forall\, k \in [\![0,n]\!]\ ,\ I(k,n) = \dfrac{1}{(n+1)\binom{n}{k}}$

Exercice 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. On note O_n la matrice nulle de $M_n(\mathbb{R})$ et I_n la matrice unité de $M_n(\mathbb{R})$
Dans tout le problème, A est une matrice carrée telle que :

$$A \in M_n(\mathbb{R}) \quad \text{avec} \quad A \neq O_n \quad \text{et} \quad A \times A = O_n \quad (*)$$

I. Quelques généralités

1) En raisonnant par l'absurde, prouver que A n'est pas inversible.

2) Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda\,.\,A + \mu\,.\,I_n = O_n$. A l'aide de $(*)$, montrer que $\lambda = 0$ et $\mu = 0$

3) On pose $M = A + t\,.\,I_n$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $t \neq 0$

a) Montrer que $M^2 = 2t\,.M - t^2\,.\,I_n$

b) En déduire que M est inversible et préciser M^{-1} en fonction de t , A et de I_n

II. Etude d'un cas particulier

Dans toute cette partie, on pose $B = A + I_n$

1) a) Calculer B^2 en fonction de A et de I_n

b) Montrer que $\forall\ k \in \mathbb{N}\ ,\quad B^k = I_n + k.A$

2) On pose $\forall\ p \in \mathbb{N}\ ,\quad S_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} B^k$

A l'aide de ce qui précède, exprimer S_p en fonction de p , A et de I_n

III. Etude du cas général

Dans cette partie, on considère les matrices : $N_\lambda = A + \lambda\,.\,I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda \neq 0\ ,\ \lambda \neq 1$

1) a) calculer $(N_\lambda)^2$ en fonction de λ , A et de I_n

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer $(N_\lambda)^k$ en fonction de λ , k , A et de I_n

2) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose $x_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} k.\lambda^{k-1}$

a) A l'aide du changement d'indice $j = k-1$, prouver que : $x_p = \lambda\,(x_p - p\,.\,\lambda^{p-1}) + \frac{1-\lambda^p}{1-\lambda}$

b) En déduire que $x_p = \dfrac{1}{(1-\lambda)^2}\,(p\,\lambda^{p+1} - \beta_p\,\lambda^p + 1)$ avec β_p à exprimer en fonction de p

3) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose $T_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} (N_\lambda)^k$. Prouver que :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^* \;,\quad T_p = \alpha_p \,.\, I_n + x_p \,.\, A \;\text{ avec } x_p \text{ défini au 2) et } \alpha_p \text{ à préciser en fonction de } p$$

IV. Calcul de T_p par une autre méthode

On reprend dans cette partie les notations de la partie III
On pose $M = N_\lambda - I_n = A + (\lambda - 1) \,.\, I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$

1) A l'aide d'un résultat établi dans la partie I (dont on justifiera l'emploi) montrer que M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de λ , A et de I_n

2) Prouver que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^* \quad \Big(N_\lambda - I_n \Big) \times \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{k} (N_\lambda)^j \right) = (N_\lambda)^{k+1} - I_n$

3) Déterminer alors l'expression de T_p en fonction de I_n et de A .

Exercice 4 :

On considère la suite de polynômes définie par :

$$P_0(X) = 2 \;,\; P_1(X) = X \;\text{ et }\; \forall\, n \geq 1 \;,\; P_{n+1}(X) = X\,P_n(X) - P_{n-1}(X)$$

1) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, P_n est un polynôme unitaire de degré n

2) On pose $\forall\, z \in \mathbb{C}^*$, $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$.

   a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, z \in \mathbb{C}^*$, $f(z)f(z^n) - f(z^{n-1}) = f(z^{n+1})$.

   b) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, z \in \mathbb{C}^*$, $P_n(f(z)) = f(z^n)$.

3) Dans cette question, $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

   a) On pose $\forall\, k \in [\![0, n-1]\!]$, $z_k = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n}}$. On admet que les $(z_k)_k$ sont deux à deux distincts. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $P_n(f(z_k)) = 0$.

   b) En déduire la factorisation de P_n dans $\mathbb{R}[X]$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $W = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.

   On admet que $P_n(0) = 2\,\cos(\frac{n\pi}{2})$. Montrer, à l'aide de ce résultat, que :

$$W = \frac{(-1)^n\,\cos(\frac{n\pi}{2})}{2^r} \quad \text{avec } r \text{ entier à préciser en fonction de } n$$