Au final ce ds (plutôt facile) comportait

Exo A. Espaces vectoriels : questions faciles(1, 2a, 4, 5a, 5b, 6a, 6b), questions moyennes (2b,3a,6c,6d), questions difficiles (3b)

Exo B. Dénombrement : questions faciles(1, 3), questions moyennes (2, 4, 5), questions difficiles (6)

Exo C. Probabilités : questions faciles(A1, A2a, A2b,A3, B1, B2a), questions moyennes (A2c), questions difficiles (B2b, B2c)

Exo D. Fonctions : questions faciles(1a,2b,2d,3d,3e,3f), questions moyennes (1b,2a,2c,3a,3c), questions difficiles (3b)

Les résultats étant donnés dans la plupart des questions (ce n'est pas toujours le cas). C'est rassurant et cela permet d'admettre le resultat pour traiter simplement les questions suivantes

L'exo de dénombrement est le plus court et simple (rentable) à rédiger, suivi de l'exo sur les fonctions.

L'exo de proba est plus simple que ce qui tombe en moyenne dans le même style.

Comme d'habitude, des points classiques du cours : sommes géométriques, sommes (et produits) telescopiques, récurrences linéaires, systèmes rodent dans le sujet...

Exo A. 1.
- $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$qui est un espace vectoriel de référence, par définition de E.
- $E \neq \emptyset$. En effet, la suite nulle $v = (0)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E car

$$8v_{n+3} - 12v_{n+2} + 6v_{n+1} - v_n = 8 \times 0 - 12 \times 0 + 6 \times 0 - 0 = 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

- Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(u,v) \in E^2$. Montrons que $\lambda u + \mu v \in E$.
  - Comme $u \in E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, comme $v \in E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et comme $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est stable par combinaisons linéaires, en tant qu'espace vectoriel, on a $\lambda u + \mu v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
  - Pour $n \in \mathbb{N}$, nous remarquons que

$$\begin{array}{rl} & 8(\lambda u + \mu v)_{n+3} - 12(\lambda u + \mu v)_{n+2} + 6(\lambda u + \mu v)_{n+1} - (\lambda u + \mu v)_n \\ = & 8\lambda u_{n+3} + 8\mu v_{n+3} - 12\lambda u_{n+2} - 12\mu v_{n+2} + 6\lambda u_{n+1} + 6\mu v_{n+1} - \lambda u_n - \mu v_n \\ = & \lambda(8u_{n+3} - 12u_{n+2} + 6u_{n+1} - u_n) + \mu(8v_{n+3} - 12v_{n+2} + 6v_{n+1} - v_n) \end{array}$$

    Comme $u \in E$ et $v \in E$, nous remarquons alors que

$$8(\lambda u+\mu v)_{n+3}-12(\lambda u+\mu v)_{n+2}+6(\lambda u+\mu v)_{n+1}-(\lambda u+\mu v)_n = \lambda\times 0+\mu\times 0 = 0$$

  A fortiori, $\lambda u + \mu v \in E$

En conclusion, E forme un $\mathbb{R}$ sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. a.
- Comme la suite $\vec{i}$ appartient à $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et satisfait

$$\begin{array}{rl} & 8i_{n+3} - 12i_{n+2} + 6i_{n+1} - i_n \\ = & 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - 12\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ = & \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{8}{2^3} - \frac{12}{2^2} + \frac{6}{2} - 1\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n(1 - 3 + 3 - 1) = 0, \end{array}$$

  nous remarquons que $\vec{i} \in E$.
- Comme la suite $\vec{j}$ appartient à $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et satisfait

$$\begin{aligned}
& 8j_{n+3}-12j_{n+2}+6j_{n+1}-j_n \\
= \;& 8(n+3)\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+3}-12(n+2)\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+2}+6(n+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}-n\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n} \\
= \;& \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n}\left(\tfrac{8(n+3)}{2^3}-\tfrac{12(n+2)}{2^2}+\tfrac{6(n+1)}{2}-n\right) \\
= \;& \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n}(n+3-3(n+2)+3(n+1)-n)=\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n}\times 0=0,
\end{aligned}$$

nous remarquons que $j \in E$.

- Comme la suite k appartient à $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et satisfait

$$\begin{aligned}
& 8k_{n+3}-12k_{n+2}+6k_{n+1}-k_n \\
= \;& 8(n+3)^2\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+3}-12(n+2)^2\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+2}+6(n+1)^2\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}-n^2\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n} \\
= \;& \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n}\left(\tfrac{8(n+3)^2}{2^3}-\tfrac{12(n+2)^2}{2^2}+\tfrac{6(n+1)^2}{2}-n^2\right) \\
= \;& \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n}\underbrace{\left((n+3)^2-3(n+2)^2+3(n+1)^2-n^2\right)}_{(1-3+3-1)^2+n(6-12+6)+3^2-3\times 2^2+3}=\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n}\times 0=0,
\end{aligned}$$

nous remarquons que $\vec{k} \in E$.

b. Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ appartienent à E. Supposons qu'il existe des saclaires x, y et z dans $\mathbb{R}$ tels que $x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=\vec{0}$, où $\vec{0}$ désigne le vecteur nul de l'espace des suites, c'est à dire la suite constante nulle. Alors, en choisssant les indices, $n=0$, n= 1 et $n=2$, on obtient le système

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} 0 = & xi_0+yj_0+zk_0 = x+y\times 0+z\times 0^2 = x \\ 0 = & xi_1+yj_1+zk_1 = \frac{x}{2}+\frac{y}{2}\times 1+\frac{z}{2}\times 1^2 = \frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2} \\ 0 = & xi_2+yj_2+zk_2 = \frac{x}{4}+\frac{y}{4}\times 2+\frac{z}{4}\times 2^2 = \frac{x}{4}+\frac{2y}{4}+\frac{4z}{4} \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} 0 = x \\ 0 = y+z \\ 0 = 2y+4z \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} 0 = x \\ 0 = y \\ 0 = z \end{cases}
\end{aligned}$$

A fortiori, $x=y=z=0$.Et la famille $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est libre. En conclusion, c'est une famille libre de vecteurs de E.

3. a. En remarquant que l'on somme les termes d'une suite arithmétique, nous obtenons que

$$S_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}(\lambda+\mu k)=n\times\frac{\lambda+\lambda+\mu(n-1)}{2}=n\times\left(\lambda+\mu\frac{n-1}{2}\right)$$

D'autre part, nous déduisons de la relation $w_k=2^{k+1}u_{k+1}-2^k u_k$ que S_{n-1} est une somme telescopique de sorte que

$$
\begin{aligned}
S_{n-1} &= \sum_{k=0}^{n-1}(2^{k+1}u_{k+1} - 2^k u_k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1}u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} 2^k u_k & \text{(séparation)} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} 2^{\ell} u_{\ell} - \sum_{k=0}^{n-1} 2^k u_k & \text{(changement d'indice } \ell = k+1\text{)} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n-1} 2^{\ell} u_{\ell} + 2^n u_n - 2^0 u_0 - \sum_{k=1}^{n-1} 2^k u_k & \text{(Chasles)} \\
&= 2^n u_n - u_0
\end{aligned}
$$

b. Nous déduisons des résultats de la question précédente que

$$2^n u_n - u_0 = n\left(\lambda + \mu \frac{n-1}{2}\right) \qquad (n \geqslant 1)$$

En particulier, nous remarquons que

$$
\begin{aligned}
u_n &= \tfrac{u_0}{2^n} + \lambda \tfrac{n}{2^n} + \mu \tfrac{n^2-n}{2^{n+1}} \\
&= u_0 \tfrac{1}{2^n} + \left(\lambda - \tfrac{\mu}{2}\right) \tfrac{n}{2^n} + \tfrac{\mu}{2} \tfrac{n^2}{2^n} & (n \geqslant 1) \\
&= u_0 i_n + \left(\lambda - \tfrac{\mu}{2}\right) j_n + \tfrac{\mu}{2} k_n
\end{aligned}
$$

Comme cette relation est également vérifiée pour $n = 0$, nous concluons que

$$\vec{u} = u_0 \vec{i} + \left(\lambda - \frac{\mu}{2}\right) \vec{j} + \frac{\mu}{2} \vec{k}$$

Ainsi, $\vec{u}$ est est combinaison linéaire des suites $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

4. La famille $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une famille libre de E d'après 1.2b et génératrice de E d'après 1.3b puisque toute suite $\vec{u}$ de E est combinaison linéaire des suites $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$. A fortiori, $\mathcal{B}$ est une base de E.
5. Pour $k \in \mathbb{N}$, nous remarquons que

$$
\begin{aligned}
w_{k+2} - 2w_{k+1} + w_k &= \underbrace{2^{k+3}u_{k+3} - 2^{k+2}u_{k+2}}_{w_{k+2}} - 2\left(\underbrace{2^{k+2}u_{k+2} - 2^{k+1}u_{k+1}}_{w_{k+1}}\right) + \underbrace{2^{k+1}u_{k+1} - 2^k u_k}_{w_k} \\
&= 2^k \left(\underbrace{8u_{k+3} - 12u_{k+2} + 6u_{k+1} - u_k}_{0 \text{ car } u \in E}\right) = 0
\end{aligned}
$$

6. D'après la question précédente, la suite w satisfait une récurrence linéaire homogène d'ordre 2 d'équation caractéristique

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0,$$

admettant la racine double 1. En particuier, $\exists!(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$w_k = \lambda 1^k + \mu k 1^k = \lambda + \mu k \qquad (k \geqslant 0)$$

7. a.

- $F \subset E$ qui est un espace vectoriel.
- $F \neq \emptyset$. En effet, la suite nulle $v = (0)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à F car

$$v_0 - 2v_1 = 0 - 2 \times 0 = 0$$

- Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(u,v) \in F^2$. Montrons que $\lambda u + \mu v \in F$.
  - Comme $u \in F \subset E$, comme $v \in F \subset E$ et comme E est stable par combinaisons linéaires, en tant qu'espace vectoriel, on a $\lambda u + \mu v \in E$
  - Nous remarquons que

    $$(\lambda u+\mu v)_0-2(\lambda u+\mu v)_1 = \lambda u_0+\mu v_0-2\lambda u_1-2\mu v_1 = \lambda(u_0-2u_1)+\mu(v_0-2v_1)$$

    Comme $u \in F$ et $v \in F$, nous remarquons alors que

    $$(\lambda u + \mu v)_0 - 2(\lambda u + \mu v)_1 = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0$$

  A fortiori, $\lambda u + \mu v \in F$

En conclusion, F forme un $\mathbb{R}$ sous-espace vectoriel de E.

b. Nous avons déjà montré au 2a que $\vec{i} \in E$ et nous remarquons que

$$i_0 - 2i_1 = \frac{1}{2^0} - 2\frac{1}{2^1} = 0.$$

De sorte que $\vec{i} \in F$.

c. Comme $\vec{u} \in F$ et comme F est un sous-espace vectoriel de E, nous avons $\vec{u} \in F$. Or nous avons montré au 4 que la famille $\mathcal{E} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ forme une base de E. Alors, il existe un unique triplet $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\vec{u} = \alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k}$. *Comme la famille $\mathcal{E}$ est génératrice, le triplet existe. Comme cetre famille est libre, le triplet est unique*

Comme $\vec{u} \in F$, nous remarquons alors que

$$0 = u_0-2u_1 = \alpha i_0+\beta j_0+\gamma k_0-2(\alpha i_1+\beta j_1+\gamma k_1) = \alpha-2\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\frac{1}{2}+\gamma\frac{1}{2}\right) = \frac{\beta+\gamma}{2}$$

A fortiori, nous avons $\gamma = -\beta$.

d. Il résulte des calculs effectués dans la question précédente que

$$\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} - \beta\vec{k} = \alpha\vec{i} + \beta(\vec{j} - \vec{k})$$

En particulier, une suite $\vec{u}$ quelconque de F est combinaison linéaires des suites $\vec{i} \in F$ et $\vec{j} - \vec{k}$. Comme la suite $\vec{j} - \vec{k}$ appartient à F d'après la relation

$$(j-k)_0 - 2(j-k)_1 = j_0 - k_0 - 2j_1 + 2k_1 = \frac{0}{1} - \frac{0^2}{1} - 2\frac{1}{2} + 2\frac{1^2}{2} = 0$$

Nous remarquons que la famille $\mathcal{F} = (\vec{i}, \vec{j} - \vec{k})$ est une famille génératrice de F, qui est également libre car Si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ vérifient $x\vec{i} + y(\vec{j} - \vec{k}) = \vec{0} = x\vec{i} + y\vec{j} - y\vec{k}$, alors nous remarquons que nous avons une combinaison linéaire nulle de la famille libre $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (montré en 2b), de sorte que $x = y = -y = 0$. En conclusion la famille $\mathcal{F}$ forme une base de F.

Exo B.

1. Il y a autant de mots de passe que de 8-listes d'éléments de l'ensemble E constitué des 26 minuscules, 10 chiffres et 6 signes de ponctuation. Il y en a

$$(26+10+6)^8 = 42^8$$

2. Pour constituer un tel mot de passe, on commence par constituer une 5-liste avec les minuscules (il y en a 26^5) que l'on complete avec une 3 liste sans répétition des 10 chiffres (il y en a A_{10}^3). Au total, il y a $26^5 \times A_{10}^3$ mots de passe.
3. L'ensemble de ces mots de passe est constitué de tous les mots de passe (42^8), privé des mots de passe ne comportant ni chiffre, ni signe de ponctuation (26^8). Au total, il y en a $42^8 - 26^8$.
4. L'ensemble de ces mots de passe est cnstitué de tous les mots de passe (42^8), privé des mots de passe sans signe de ponctuation (il y en a $(26+10)^8 = 36^8$) et des mots de passe comportant exactement un signe de ponctuation (on choisit le signe de ponctuation, sa position, et on complete les 7 cases qui restent avec des minuscules ou des chiffres : il y en a $\binom{6}{1} \times \binom{8}{1} \times 36^7$). Au total, il y en a

$$42^8 - 36^8 - \binom{6}{1}\binom{8}{1}36^7$$

5. Pour constituer un mot de passe avec exactement trois chiffres et un signe de ponctuation,
   1. On choisit 3 positions pour les trois chiffres $\left(\binom{8}{3}\text{ possibilités}\right)$
   2. On choisit les chiffres pour ces trois positions (10^3 possibilités)
   3. On choisit la position du signe de ponctuation $\left(\binom{5}{1}\text{ possibilités}\right)$
   4. On choisit le signe de ponctuation $\left(\binom{6}{1}\text{ possibilités}\right)$
   5. On complete les quatre cases restantes avec des minuscules (26^4 possibilités)

   Au total, il y en a

$$\binom{8}{3} \times 10^3 \times \binom{5}{1} \times \binom{6}{1} \times 26^4$$

6. Pour constituer un tel mot de passe, on choisit huit chiffres distincts $\left(\binom{10}{8}\right)$, puis on les dispose dans l'ordre croissant. Au total, il y en a $\binom{10}{8} = 40$
   spéciale dédicace : K., tu peux les écrire tous, si tu le souhaites, je valide

Exo C. A. 1. Comme les tirages de boules sont indépendants et comme les boules ont les mêmes probabilités d'être tirées, on utilise la probabilité uniforme pour calculer nos probabilités conditionnelles. En particulier, on a

$$\begin{aligned} P_{U_1}(R_k) &= \tfrac{2}{5} \\ P_{U_2}(R_k) &= \tfrac{1}{1} = 1 \\ P_{U_3}(R_k) &= \tfrac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

Il résulte alors de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements (non négligeables) $\{U_1, U_2, U_3\}$ que

$$\begin{aligned} P(R_k) &= P(U_1) \times P_{U_1}(R_k) + P(U_2) \times P_{U_2}(R_k) + P(U_3) \times P_{U_3}(R_k) \\ &= \tfrac{1}{3} \times \tfrac{2}{5} + \tfrac{1}{3} \times 1 + \tfrac{1}{3} \times 0 = \tfrac{2+5}{15} = \tfrac{7}{15} \end{aligned}$$

2. a. D'après l'indépendance des tirages des boules (une fois l'urne choisie),

$$P_{U_1}(R_1 \cap \cdots \cap R_n) = P_{U_1}(R_1) \times \cdots \times P_{U_1}(R_n) = \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

b. De même, on a

$$\begin{aligned} P_{U_2}(R_1 \cap \cdots \cap R_n) &= P_{U_2}(R_1) \times \cdots \times P_{U_2}(R_n) = 1^n = 1 \\ P_{U_3}(R_1 \cap \cdots \cap R_n) &= P_{U_3}(R_1) \times \cdots \times P_{U_3}(R_n) = 0^n = 0 \end{aligned}$$

c. Les résultats précédents et la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements (non négligeables) $\{U_1,U_2,U_3\}$ induisent que

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap \cdots \cap R_n) &= P(U_1) \times P_{U_1}(R_1 \cap \cdots \cap R_n) + P(U_2) \times P_{U_2}(R_1 \cap \cdots \cap R_n) \\ &\quad + P(U_3) \times P_{U_3}(R_1 \cap \cdots \cap R_n) \\ &= \tfrac{1}{3} \times \left(\tfrac{2}{5}\right)^n + \tfrac{1}{3} \times 1 + \tfrac{1}{3} \times 0 = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{2}{5}\right)^n + \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

3. D'après les résultas des questions 2a et 2c, nous avons

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap R_2) &= \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{2}{5}\right)^2 + \tfrac{1}{3} = \tfrac{4+25}{3\times 5^2} = \tfrac{29}{3\times 5^2} \\ P(R_1)P(R_2) &= \left(\tfrac{7}{15}\right)^2 = \tfrac{49}{3^2\times 5^2} \end{aligned}$$

Comme $P(R_1 \cap R_2) \neq P(R_1)P(R_2)$, les événements R_1 et R_2 ne sont pas indépendants pour la probabilité P.

B. 1. Soit $k \in [\![2,n]\!]$. Alors, il résulte du résultat de la question 2a et de la définition ds probabilités conditionnelles que

$$P_{R_1\cap\cdots\cap R_{k-1}}(R_k) = \frac{P(R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap R_k)}{P(R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1})} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^k + \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} + \frac{1}{3}} = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^k + 1}{\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} + 1}$$

2. a. Nous déduisons du résultat de la question A1a que

$$P(A_1) = P(\overline{R_1}) = 1 - P(R_1) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$$

b. Pour $\geqslant 2$, nous remarquons que $A_k = R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap \overline{R_k}$. En particulier, nous déduisons de la formule des probabilités composées (vu qu'il n'y a pas indépendance entre les R_i) que

$$\begin{aligned} P(A_k) &= P(R_1) \times P_{R_1}(R_1 \cap R_2) \times \cdots \times P_{R_1\cap\cdots\cap R_{k-2}}(R_{k-1}) \times P_{R_1\cap\cdots\cap R_{k-1}}(\overline{R_k}) \\ &= \tfrac{7}{15} \times \left(\textstyle\prod_{\ell=2}^{k-1} P_{R_1\cap\cdots\cap R_{\ell-1}}(R_\ell)\right) \times \left(1 - P_{R_1\cap\cdots\cap R_{k-1}}(R_k)\right) \\ &= \tfrac{7}{15} \times \textstyle\prod_{\ell=2}^{k-1} \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^\ell + 1}{\left(\frac{2}{5}\right)^{\ell-1} + 1} \times \left(1 - \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^k + 1}{\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} + 1}\right) \qquad \text{(produits telescopiques)} \\ &= \tfrac{7}{15} \times \left(\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} + 1}{\left(\frac{2}{5}\right)^1 + 1} - \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^k + 1}{\left(\frac{2}{5}\right)^1 + 1}\right) \\ &= \tfrac{7}{15} \times \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} - \left(\frac{2}{5}\right)^k}{\frac{7}{5}} = \tfrac{5}{15}\left(\tfrac{2}{5}\right)^{k-1} \times \left(1 - \tfrac{2}{5}\right) \\ &= \tfrac{1}{5} \times \left(\tfrac{2}{5}\right)^{k-1} = \tfrac{1}{2} \times \left(\tfrac{2}{5}\right)^k \end{aligned}$$

c. On remarque que $\overline{A} = \cup_{k=1}^n A_k$ de sorte que l'on déduit de la formule des sommes géométriques de raison différente de 1 que

$$\begin{aligned}
P(A) &= 1 - P(\cup_{k=1}^n A_k) = 1 - \textstyle\sum_{k=1}^n P(A_k) && \text{(événements mutuellement incompatibles)}\\
&= 1 - \textstyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^k && \text{(Somme géométrique de raison } \neq 1\text{)}\\
&= 1 - \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{5}} = 1 - \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)\\
&= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n
\end{aligned}$$

Exo D. 1. a. *Réaliser un tableau de variation de g aide beaucoup pour la suite*

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que différence de fonctions dérivables. De plus, on a

$$g'(x) = \mathrm{e}^x - 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

En particulier, il résulte de la croissance stricte de la fonction exponentielle et de l'égalité $\mathrm{e}^0 = 1$ que

$$g'(x) > 0 \iff x > 0 \qquad g'(x) = 0 \iff x = 0 \qquad g'(x) < 0 \iff x < 0$$

La fonction g est donc strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ (sur $]-\infty, 0]$ d'après la propriété 10.76 du cours) et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (idem sur $[0, +\infty[$).

b. La fonction g est continue, strictement croissante sur $[0, +\infty[$ donc est une bijection $\tilde{g}$ de $[0, +\infty[$ dans $g([0, +\infty[) = [1, +\infty[$ (il résulte en effet du théorème de croissance comparée que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. En particulier, il existe une unique solution strictement positive β_n de l'équation $g(x) = n$ (car $g(0) = 1 < n$), il s'agit de $\beta_n = \tilde{g}^{-1}(n)$.
De même, il existe une unique solution α_n stritement négative à l'équation $g(x) = n$ (pour les mêmes raisons, car $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.

2. a. Pour $n \geqslant 2$, nous déduisons l'inégalité $g(n) \geqslant 1$ de la croissance de g sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et de $g(0) = \mathrm{e}^0 - 0 = 1$. De plus, nous remarquons que

$$g(\ln n) = \mathrm{e}^{\ln n} - \ln(n) = n - \underbrace{\ln(n)}_{\geqslant 0} \leqslant n.$$

b. Pour $n \geqslant 2$, nous remarquons que

$$g(\ln(2n)) = \mathrm{e}^{\ln(2n)} - \ln(2n) = 2n - \ln(2) - \ln(n) = n + (n - \ln(n)) - \ln(2) = n + g(\ln(n)) - \ln(2).$$

Comme $g(\ln(n)) \geqslant 1 \geqslant \ln(2)$ (car il est bien connu que $2 < \mathrm{e}$ et donc que $\ln(2) < \ln(\mathrm{e}) = 1$), nous en déduisons que

$$g(\ln(2n)) = n + \underbrace{g(\ln(2b)) - \ln(2)}_{\geqslant 0} \geqslant n$$

c. Pour $n \geqslant 2$, nous avons $g(\ln(n)) \leqslant n = g(\beta_n) \leqslant g(\ln(2n))$, d'après les résultats précédents. La fonction g étant strictement croissante sur $[0, +\infty[$, nous avons alors nécéssairement

$$\ln(n) \leqslant \beta_n \leqslant \ln(2n) \qquad (n \geqslant 2).$$

Comme $\beta_n \geqslant \ln(n)$ pour $n \geqslant 2$ et comme $\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$, il résulte du théorème d'encadrement (ou du principe des gendarmes, etc...) que

$$\lim_{n\to+\infty} \beta_n = +\infty$$

d. En divisant par $\ln(n)$ l'inégalité obtenue précédemment, il vient

$$1 = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} \leqslant \frac{\beta_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{\ln(2n)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(2)}{\ln(n)} \qquad (n \geqslant 2).$$

Comme les suites à gauche et à droite convergent vers 1, il résulte du principe des gendarmes que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\beta_n}{\ln(n)} = 1$$

Ce qui revient à dire que $\beta_n \sim \ln(n)$

3. a. Comme $\mathrm{e} > 1$, nous remarquons que

$$g(-1) = \mathrm{e}^{-1} + 1 < 2 = g(\alpha_2) < \mathrm{e}^{-2} + 2 = g(-2)$$

La fonction g étant strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, qui contient -2, α_2 et -1, nous avons nécéssairement $-2 < \alpha_2 < -1$.

b. Pour $k \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$: $\alpha_2 \leqslant u_k \leqslant -1$.

- $\mathcal{P}_0$ est vraie d'après l'égalité $u_0 = -1$ et le résultat de la question 3a : $-2 < \alpha_2 < -1$.
- Supposnons $\mathcal{P}_n$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$ et montrons $\mathcal{P}_{n+1}$. Commençons par remarquer que $u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n} - 2 = g(u_n) + u_n - 2$. Or, d'après $\mathcal{P}_n$, nous avons $\alpha_2 \leqslant u_n \leqslant -1$ et il résulte de la décroissance de g sur $]-\infty, 0]$ que $2 = g(\alpha 2) \leqslant g(u_n) \leqslant g(-1) = 1 + \mathrm{e}^{-1}$. De sorte que

$$\alpha_2 = 2 + \alpha_2 - 2 \leqslant u_{n+1} = g(u_n) + u_n - 2 \leqslant 1 + \mathrm{e}^{-1} - 1 - 2 \leqslant -1$$

  En particulier $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

En conclusion, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

c. *ARGH le sujet n'utilise pas une nouvelle lettre pour la nouvelle fonction g.* Pour éviter les confusions dans le corrigé, je vais poser

$$h(t) = \mathrm{e}^t - 2 \qquad (\alpha_2 \leqslant t \leqslant -1)$$

Cette question sent à plein nez l'inégalité des acrroissements finis.
La fonction h est évidemment de classe C^1 sur le segment $[\alpha_2, -1]$ et on a

$$h'(t) = \underbrace{0 \leqslant}_{\text{ne servira pas}} \mathrm{e}^t \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}} \qquad (\alpha_2 \leqslant t \leqslant -1)$$

Il résulte alors de l'inégalité des accroissements finis appliquée entre $x \in [\alpha_2, -1]$ et α_2 que

$$0 = 0 \times (x - \alpha_2) \leqslant h(x) - \alpha_2 \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}(x - \alpha_2) \qquad (\alpha_2 \leqslant x \leqslant -1)$$

d. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour le nombre réel $x = u_k$, qui appartient à l'intervalle $[\alpha_2, -1]$ d'après la question 3b, il résulte de l'égalité $u_{n+1} = h(u_n)$ et de l'inégalité établie au 3c que

$$u_{k+1} - \alpha_2 = h(u_k) - \alpha_2 \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}(u_k - \alpha_2) \qquad (k \in \mathbb{N})$$

e. Pour $k \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la proposition $\mathcal{P}_k : 0 \leqslant u_k - \alpha_2 \leqslant \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^k$

- $\mathcal{P}_0$ est vraie car $0 = -1 - (-1) \leqslant u_0 - \alpha_2 = -1 - \alpha_2 \leqslant 1 - (-2) = 1$ puisque $-2 \leqslant \alpha_2 \leqslant -1$ et $u_0 = -1$.
- Supposons la proposition $\mathcal{P}_k$ pour un entier $k \geqslant 0$ et montrons $\mathcal{P}_{k+1}$ Nous remarquons que

$$\overbrace{0 \leqslant}^{\text{d'après 3b}} \; u_{k+1} - \alpha_2 \; \overbrace{\leqslant}^{\text{d'après 3d}} \; \tfrac{1}{\mathrm{e}}(u_k - \alpha_2) = \; \overbrace{\leqslant}^{\text{d'après } \mathcal{P}_k} \; \tfrac{1}{\mathrm{e}}\left(\tfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^k$$
$$\leqslant \left(\tfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1}$$

Donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

f. Il résulte de la question précédente et du principe des gendarmes que la suite $u_n - \alpha_2$ converge vers 0. A fortiori, la suite u converge vers α_2.