

DEVOIR MAISON 14

CORRECTION DU PROBLÈME 1

A. 1.

- $\mathcal{C}_A$ est inclus, par définition, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de référence
- $\mathcal{C}_A$ contient la matrice nulle car $A \times 0 = 0 = 0 \times A$ de sorte que $\mathcal{C}_A \neq \emptyset$
- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(M, N) \in \mathcal{C}_A^2$. Comme $AM = MA$ et $AN = NA$, il résulte de la distributivité du produit matriciel et de la loi du scalaire mobile que

$$(\lambda M + \mu N) \times A = \lambda MA + \mu NA = \lambda AM + \mu AN = (\lambda M + \mu N) \times A$$

En particulier, $\lambda M + \mu N \in \mathcal{C}_A$. L'ensemble $\mathcal{C}_A$ est donc stable par combinaison linéaire.

En conclusion, $\mathcal{C}_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, il résulte de l'associativité du produit, de la loi du scalaire mobile et du fait que I_n soit un élément neutre pour la multiplication, que

$$M \times (\lambda I_n) = \lambda(M \times I_n) = \lambda M = \lambda(I_n \times M) = (\lambda I_n) \times M$$

En particulier $M \in \mathcal{C}_{\lambda I_n}$, de sorte que

$$\mathcal{C}_{\lambda I_n} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $A \in \text{Vect}(I_n)$, il résulte des calculs effectués dans la question précédente que $\dim(\mathcal{C}_A) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2 \geq 2$.
Si $A \notin \text{Vect}(I_n)$, alors $\mathcal{C}_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, contenant les matrices I_n (car $A \times I_n = A = I_n \times A$) et A (car $A \times A = A^2 = A \times A$). Comme la famille $\{I_n, A\}$ est libre (puisque $A \notin \text{Vect}(I_n)$), $\mathcal{C}_A$ est de dimension au moins 2 car il contient une famille libre de deux vecteurs.
Dans tous les cas, $\mathcal{C}_A$ est au moins de dimension 2.
4. *Houla, c'est une question technique ça... qui exploite le fait que les bases permettent de transformer (via isomorphisme) vecteurs en coordonnées, applications linéaires en matrices, etc...* Soit $\psi : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ l'isomorphisme (d'après le cours) associant à un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$, sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. Alors, je prétends que ψ transforme $\mathcal{C}_f$ en $\mathcal{C}_A$, c'est à dire que $\psi(\mathcal{C}_f) = \mathcal{C}_A$, ce qui implique (les deux espaces étant isomorphes) que

$$\dim(\mathcal{C}_f) = \dim(\mathcal{C}_A)$$

En effet, comme $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \psi(f)$, pour $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, nous remarquons que

$$\begin{aligned}
g \in \mathcal{C}_f &\iff f \circ g = g \circ f \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ g) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) \\
&\iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \\
&\iff \mathcal{A} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \times \mathcal{A} \\
&\iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \in \mathcal{C}_A \\
&\iff \psi(g) \in \mathcal{C}_A
\end{aligned}$$

A fortiori, on a bien $\psi(\mathcal{C}_f) = \psi(\mathcal{C}_A)$.

5. *du Scilab !*

```

function [r]=commutables(A,B)
    r = A*B == B*A
endfunction

```

B. 1. *On peut utiliser la méthode MARRE mais on va faire ici plus court/élégant via des équivalences*

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nous remarquons que

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{C}_B &\iff M \times B = B \times M \iff M \left(A - \frac{\text{tr}(A)}{2} I_2 \right) = \left(A - \frac{\text{tr}(A)}{2} I_2 \right) M \\
&MA - \frac{\text{tr}(A)}{2} M = AM - \frac{\text{tr}(A)}{2} \iff MA = AM \\
&\iff M \in \mathcal{C}_A
\end{aligned}$$

En particulier, nous avons $\mathcal{C}_B = \mathcal{C}_A$.

2. Nous remarquons que

$$B = \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{d-a}{2} \end{pmatrix} \quad B^2 = \begin{pmatrix} \left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + bc & \frac{a-d}{2}b + b\frac{d-a}{2} \\ c\frac{a-d}{2} + \frac{d-a}{2}c & bc + \left(\frac{d-a}{2}\right)^2 \end{pmatrix} = \left(bc + \left(\frac{d-a}{2}\right)^2 \right) I_2$$

En particulier, pour $r = bc + \left(\frac{d-a}{2}\right)^2$ et $P = x^2 - rI_2$, nous avons

$$P(B) = B^2 - rI_2 = 0$$

De sorte que P est un polynôme annulateur de B .

3. Soient $r \in \mathbb{R}$ et $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. alors, on a

$$\begin{aligned}
N \in \mathcal{C}_M &\iff NM = MN \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & r \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & r \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} b & ar \\ d & cr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rc & rd \\ a & b \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} b = rc \\ ar = rd \\ d = a \\ cr = b \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} b = rc \\ d = a \end{cases}
\end{aligned}$$

A fortiori, on a

$$\mathcal{C}_M = \left\{ aI_2 + c \begin{pmatrix} 0 & r \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : (a, c) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(I_2, \begin{pmatrix} 0 & r \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

De sorte que $\mathcal{C}_M$ est de dimension 2 quel que soit $r \in \mathbb{R}$

4. *Question bizarrement posée. Il faut lire la question suivante pour voir où ils veulent en venir...*

Supposons que les trois familles de deux vecteurs $(e_1, f(e_1))$, $(e_2, f(e_2))$ et $(e_1 + e_2, f(e_1 + e_2))$ soient liées. Comme e_1 , e_2 et $e_1 + e_2$ sont des vecteurs non nuls, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ tels que

$$\begin{cases} f(e_1) = ae_1 \\ f(e_2) = be_2 \\ f(e_1 + e_2) = c(e_1 + e_2) \end{cases} \implies 0 = f(e_1 + e_2) - f(e_1) - f(e_2) = (c - a)e_1 + (c - b)e_2 = 0$$

Comme (e_1, e_2) est libre (puisque c'est une base), nous avons forcément $c - a = 0 = c - b$, de sorte que $a = c = b$. Nous en déduisons alors que $f(e_1) = ae_1 = a\text{Id}(e_1)$ et $f(e_2) = be_2 = ae_2 = a\text{Id}(e_2)$. Comme les applications linéaires f et $a\text{Id}$ coïncident sur la base (e_1, e_2) , elles sont égales, de sorte que

$$f = a\text{Id}$$

Ceci contredit la définition de f , car la matrice canoniquement associée à f est $B = A - \frac{\text{tr}(A)}{2}I_2 \neq aI_2$, en effet (A, I_2) est libre

5. Il résulte du raisonnement par l'absurde mené à la question précédente qu'il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^2$ tel que $(v, f(v))$ soit libre car les trois familles $(e_1, f(e_1))$, $(e_2, f(e_2))$ et $(e_1 + e_2, f(e_1 + e_2))$ ne peuvent pas être toutes liées. A fortiori, la famille libre $= (v, f(v))$ de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, en constitue une base.

Accrochez vous !

Comme $X^2 - r$ est un polynôme annulateur de B , c'est également un polynôme annulateur de f , de sorte que $f^2 - r\text{Id} = 0$.

En particulier, $f^2(v) = r\text{Id}(v) = rv$. De sorte que

$$\mathcal{M}at(f) = \begin{pmatrix} 0 & r \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M$$

6. *Faisons la synthèse des questions précédentes* Il résulte de la question 2a que $\dim(\mathcal{C}_A) = \dim(\mathcal{B})$. Or d'après la question 1d, il vient $\dim(\mathcal{C}_B) = \dim(\mathcal{C}_f)$. Or dans la base, $\mathcal{M}at(f) = M$, de sorte que l'on peut montrer que $\dim(\mathcal{C}_f) = \dim(\mathcal{C}_M)$ (un peu comme à la question 1d, sauf qu'au lieu d'utiliser la base canonique, on utilise la base) Et enfin, il résulte de la question 2c que $\dim(\mathcal{C}_M) = 2$ de sorte que $\dim(\mathcal{C}_A) = 2$. Comme (A, I_2) est une famille libre de $\mathcal{C}_A$, c'en est une base. *Une manière bien torturée d'arriver à ce résultat, dans un cas relativement simple...la dimension 2*

- C. 1. *On remarque au brouillon que $C_1 - C_2 = 0$ et que $C_1 - C_3 = 0$...* Les vecteurs $(1, -1, 0)$ et $(1, 0, -1)$ appartiennent au noyau de f car

$$A \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 1 + 0 \\ -1 + 1 + 0 \\ 1 - 1 + 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ et } A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 0 - 1 \\ -1 + 0 + 1 \\ 1 + 0 - 1 \end{pmatrix} = 0$$

Comme A est clairement de rang 1, il résulte du théorème du rang que $\dim(\ker f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \text{rg}(f) = 3 - 1 = 2$ de sorte que

$$\ker(f) = \text{Vect}((1, -1, 0), (1, 0, -1))$$

Ensuite, l'image de f qui est de dimension 1, est $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(1, 0, 0)) = \text{Vect}((1, -1, 1))$. *le sujet demande l'image et le noyau de a , un léger abus, il devrait demander le noyau et l'image de l'endomorphisme f associé à A dans la base canonique*

2. On remarque que $A^2 = \begin{pmatrix} 1-1+1 & 1-1+1 & 1-1+1 \\ -1+1-1 & -1+1-1 & -1+1-1 \\ 1-1+1 & 1-1+1 & 1-1+1 \end{pmatrix} = A$.

A fortiori, A est la matrice d'un projecteur, donc f est un projecteur. L'endomorphisme f est donc une projection sur son image $\text{Im}(f)$ déterminée précédemment, parallèlement à son noyau, déterminée précédemment également.

3. P est inversible car c'est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de rang 3. En effet

$$\text{rg}(P) = \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

J'aurais mieux fait d'inverser directement P , vu qu'on a aussi besoin de l'inverse... En déduisons que la matrice P est inversible, d'inverse

$$P^{-1} = Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

du calcul

$$Q \times P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1+1 & 1-1 & 1-1 \\ -1+2-1 & -1+2 & -1+1 \\ 1-1 & 1-1 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

J'ai fait la recherche de matrice inverse au brouillon bien sûr, avec l'algorithme standard

4. Φ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car c'est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (au départ et à l'arrivée)
 - Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $P \times M \times P^{-1}$ est défini et appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en tant que produit de matrices réelles carrées de taille n . De sorte que $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une application
 - Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, il résulte de la distributivité et de la loi du scalaire mobile que

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda M + \mu N) &= P(\lambda M + \mu N)P^{-1} = P(\lambda M)P^{-1} + P(\mu N)P^{-1} \\ &= \lambda PMP^{-1} + \mu PNP^{-1} \\ &= \lambda \Phi(M) + \mu \Phi(N) \end{aligned}$$

De plus, le noyau de Φ est réduit à la matrice nulle car (en multipliant par P à droite et P^{-1} à gauche)

$$M \in \ker(\Phi) \iff \Phi(M) = 0 \iff PMP^{-1} = 0 \iff PM = 0 \times P = 0 \iff M = P^{-1} \times 0 = 0$$

A fortiori, Φ est injective et même (espace vectoriel de même dimension finie au départ et à l'arrivée) bijective. C'est donc un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Enfin, pour une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nous remarquons que $\Phi^{-1}(M) = P^{-1}MP$ et aussi que (multiplication par P^{-1} à gauche et par P à droite)

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}_{PAP^{-1}} &\iff M \times PAP^{-1} = PAP^{-1} \times M \\ &\iff P^{-1}M \times PAP^{-1} = AP^{-1} \times M \\ &\iff P^{-1}M \times PA = AP^{-1} \times M \times P \\ &\iff P^{-1}MP \times A = A \times P^{-1}MP \\ &\iff \Phi^{-1}(M) \times A = A \times \Phi^{-1}(M) \\ &\iff \Phi^{-1}(M) \in \mathcal{C}_A \\ &\iff M \in \Phi(\mathcal{C}_A) \end{aligned}$$

A fortiori, nous obtenons que $\Phi(\mathcal{C}_A) = \mathcal{C}_{PAP^{-1}} = \mathcal{C}_{\Phi(A)}$

5. Nous remarquons que

$$\begin{aligned} PAP^{-1} &= PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D \end{aligned}$$

Pour info, nous venons de diagonaliser la matrice A (algorithme ECS2), c'est sensé simplifier le problème car D est plus simple que A . Étant donnée une

matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & g & i \end{pmatrix}$, nous avons

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}_D &\iff MD = DM \iff \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & g & i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De sorte que $\mathcal{C}_D = \mathcal{C}_{PAP^{-1}} = \text{Vect} \left(D, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

et que $\dim(\mathcal{C}_A) = \dim(\Phi(\mathcal{C}_A)) \dim(\mathcal{C}_D) = 5$ Wahh, c'est bourrin quand même...

D. 1. Comme p est un projecteur de $\mathbb{R}^n$, on sait que

$$\mathbb{R}^n = \ker p \oplus \text{Im } p$$

Comme p est de rang p , la dimension de son image est p . Soit $e_1, \dots, e_p$ une base de son image et $e_{p+1}, \dots, e_n$ une base de son noyau (qui est de dimension $n - p$, d'après l'identité ci-dessus). Alors, d'après la propriété de

concaténation des bases, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et comme les vecteurs de l'image de p sont invariants par p alors que les vecteurs du noyau de p sont transformés en 0, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J_r,$$

La matrice ci dessus contenant r 1 sur la diagonale principale

2. f appartient à $\mathcal{C}_p$ si et seulement si f commute avec p . Procédons *avec la méthode MARRE* par double implication. Supposons que p commute avec f . Alors, pour $x \in \ker(p)$, on a

$$p(f(x)) = p \circ f(x) = f \circ p(x) = f(p(x)) = f(0) = 0$$

De sorte que $p(x) \in \ker(p)$. Le noyau de p est donc stable par f . Par ailleurs, si $y \in \text{Im}(p)$, alors il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = p(x)$ et alors

$$f(y) = f(p(x)) = f \circ p(x) = p \circ f(x) = p(f(x)) \in \text{Im}(p)$$

De sorte que l'image de p est également stable par f .

Réciproquement, supposons que le noyau et l'image de p soit stable par f . Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Comme $\mathbb{R}^n = \ker p \oplus \text{Im } p$, il existe un vecteur $y \in \text{Im}(p)$ (et donc $y = p(y)$) et un vecteur $z \in \ker(p)$ (et donc $p(z) = 0$) tels que $x = y + z$. A fortiori, comme les vecteurs de l'image de p sont invariants par p , il vient

$$\begin{aligned} f \circ p(x) &= f(p(x)) = f(p(y + z)) = f(p(y) + p(z)) = f(y + 0) \\ &= \underbrace{f(y)}_{\in \text{Im}(p)} = p(f(y)) + 0 = p(f(y)) + p(\underbrace{f(z)}_{\in \ker(p)}) \\ &= p(f(y + z)) = p(f(x)) \\ &= p \circ f(x) \end{aligned}$$

En particulier, les applications $f \circ p$ et $p \circ f$ coïncident sur $\mathbb{R}^n$, donc elles sont égales. De sorte que $p \circ f = f \circ p$, c'est à dire qu'elles commutent. *Ouch, dur...*

3. La matrice de $f \in \mathcal{C}_p$ dans la base de la question a doit avoir la forme $\begin{pmatrix} M_r & 0 \\ 0 & N_{n-r} \end{pmatrix}$, avec M_r matrice carrée quelconque de taille r et N_{n-r} matrice carrée quelconque de taille $n - r$, Car le noyau et l'images de p doivent être stables par f , M_r est la matrice de la restriction de f à $\text{Im}(p)$ et N_{n-r} est la matrice de la restriction de f à $\ker(p)$
4. En particulier, comme $\mathcal{C}_p$ est l'ensemble des applications f dont la matrice (dans la base de a) vérifie les contraintes énoncées dans la question précédentes, on a

$$\dim(\mathcal{C}_p) = r^2 + (n - r)^2$$

5. M est la matrice d'un projecteur p de rang $r = \text{rg}(M)$. A fortiori, on a

$$\dim(\mathcal{C}_M) = \dim(\mathcal{C}_p) = r^2 + (n - r)^2 = \text{rg}(M)^2 + (n - \text{rg}(M))^2$$

Correction du Problème 2

0. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(n) = +\frac{\pi}{2}$, comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ et comme

$$n \sin \frac{1}{n} \sim n \times \frac{1}{n} = 1 \rightarrow 1,$$

il vient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Slors, nous déduisons du changement d'indice $i' = i - r$ et de la r -périodicité de la suite x que

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \sum_{i=n}^{n+r-1} x_i - y &= \frac{1}{r} \sum_{i=n}^{n+r-1} x_i - \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} x_i \\ &= \frac{1}{r} \left(\sum_{i=n}^{n+r-1} x_i - \sum_{i=0}^{n-1} x_i \right) \\ &= \frac{1}{r} \left(\sum_{i'=0}^{n-1} x_{i'+r} - \sum_{i=0}^{n-1} x_i \right) \\ &= \frac{1}{r} \left(\sum_{i'=0}^{n-1} x_{i'} - \sum_{i=0}^{n-1} x_i \right) = 0 \end{aligned}$$

En particulier, nous obtenons que $y = \frac{1}{r} \sum_{i=n}^{n+r-1} x_i$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Pour $n \geq 1$, nous remarquons que

$$\begin{aligned} w_{n+r} &= (n+r)y_{n+r} - (n+r)y = (n+r) \frac{1}{n+r} \sum_{i=0}^{n+r-1} x_i - (n+r)y \\ &= \sum_{i=0}^{n+r-1} x_i - (n+r)y \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} x_i + \sum_{i=n}^{n+r-1} x_i - (n+r)y \\ &= ny_n + \underbrace{\sum_{i=n}^{n+r-1} x_i}_{ry} - (n+r)y \\ &= ny_n - ny = w_n \end{aligned}$$

En particulier, la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ est r -périodique.

3. Une suite r -périodique $(x_n)_{n \geq 0}$ est bornée car

$$|x_k| \leq M = \max \{|x_0|, \dots, |x_{r-1}|\} \quad (k \geq 0)$$

En effet, pour $k \in \mathbb{N}$, il résulte de la division euclidienne de k par r qu'il existe deux entiers $q \geq 0$ et $s \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$ tel que $k = qr + s$ et alors, on a

$$|x_k| = |x_{qr+s}| = |w_s| \leq M$$

4. Comme la suite w est r -périodique, elle est bornée, de sorte qu'il existe un nombre réel M vérifiant $|w_n| \leq M$ pour $n \geq 1$. Alors, nous obtenons que

$$|y_n - y| = \left| \frac{w_n}{n} \right| = \frac{|w_n|}{n} \leq \frac{M}{n} \quad (n \geq 1).$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M}{n} = 0$, il résulte de la propriété des gendarmes que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (y_n - y) = 0$$

et donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y$.

- E. 1. Nous remarquons que

$$\begin{cases} B - \frac{1}{6}C = A \\ B + C = I_2 \end{cases} \iff \begin{cases} B - \frac{1}{6}C = A \\ \frac{7}{6}C = I_2 - A \end{cases} \iff \begin{cases} B = A + \frac{1}{7}(I_2 - A) = \frac{1}{7}(I_2 + 6A) = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ C = \frac{6}{7}(I_2 - A) = \frac{6}{7} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ -1/2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

2. De simples calculs matriciels donnent

$$\begin{aligned} B^2 &= \frac{1}{7^2} \begin{pmatrix} 21 & 28 \\ 21 & 28 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = B \\ C^2 &= \frac{1}{7^2} \begin{pmatrix} 28 & -28 \\ -21 & 21 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = C \\ BC &= \frac{1}{7^2} \begin{pmatrix} 12 - 12 & -12 + 12 \\ 12 - 12 & -12 + 12 \end{pmatrix} = 0 \\ CB &= \frac{1}{7^2} \begin{pmatrix} 12 - 12 & 16 - 16 \\ -9 + 9 & -12 + 12 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

En particulier, B et C sont des matrices de projecteurs qui commutent.

3. Pour $n \geq 1$, il résulte alors du binôme de Newton (B et C commutent) que

$$\begin{aligned} A^n &= \left(B - \frac{1}{6}C \right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(-\frac{1}{6}C \right)^k B^{n-k} \\ &= B^n + \left(-\frac{1}{6}C \right)^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \left(-\frac{1}{6}C \right)^k B^{n-k} \\ &= B + \left(-\frac{1}{6} \right)^n C + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \left(-\frac{1}{6} \right)^k \underbrace{CB}_0 \\ &= B + \left(-\frac{1}{6} \right)^n C \end{aligned}$$

En particulier, nous obtenons que $A^n = B + \left(-\frac{1}{6}\right)^n C \in \text{Vect}(B, C)$

4. Il résulte du calcul précédent que $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = B$. Par ailleurs, nous déduisons de la formule des sommes géométriques que

$$\begin{aligned} P_n(A) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} A^k = \frac{1}{n} \left(I_2 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(B + \left(-\frac{1}{6}\right)^k C \right) \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(I_2 + (n-1)B + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{6}\right)^k \right) C \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(I_2 + (n-1)B + \frac{-\frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{6}\right)^n}{1 + \frac{1}{6}} C \right) \end{aligned}$$

En particulier, nous obtenons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(A) = B$

- F. 1. Nous remarquons que

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -8 & 6 \\ 6 & -15 & 10 \end{pmatrix}$$

Alors, nous remarquons que

$$M^3 - 3M^2 + 3M - I_3 = \begin{pmatrix} 1-1 & -3+3 & 3-3 \\ 3-3 & -8+9-1 & 6-9+3 \\ 6-9+3 & -15+24-9 & 10-18+9-1 \end{pmatrix} = 0$$

de sorte que le polynôme unitaire $P = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$ est un polynôme annulateur de M .

2. Procédons à la division euclidienne (théorique) de X^n par P . Alors, il existe deux polynômes $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R \in R_2[X]$ uniques tels que $X^n = PQ + R$. On veut surtout le reste de la division en fait...

Comme $P = X^3 - 3X^2 + 3X - 1 = (X-1)^3$, en substituant 1 à X puis en dérivant et en substituant 1 à X , puis en dérivant 2 fois et en substituant 1 à X dans

$$X^n = PQ + R = (X-1)^3 Q + a + bX + cX^2,$$

il vient

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ b + 2c = n \\ 2c = n(n-1) \end{cases} \iff \begin{cases} c = \frac{n(n-1)}{2} \\ b = n - n(n-1) = n(2-n) \\ a = 1 - b - c = 1 - \frac{n(n-1)}{2} - n(2-n) = \frac{n^2-3n+2}{2} \end{cases}$$

En notant $R = a + bX + cX^2$ et en substituant M à X il vient

$$\begin{aligned} X^n &= P(M)Q(M) + R(M) = 0 + aI_3 + bM + cM^2 \\ &= \frac{n^2-3n+2}{2} I_3 + n(2-n)M + \frac{n(n-1)}{2} M^2 \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

3. La suite $(P_n(M))_{n \geq 1}$ n'est pas convergente. Prouvons le par l'absurde en essayant d'éviter de souffrir. En effet, si elle était convergente alors

$$(I_3 - M) \times P_n(M) = \frac{1}{n}(1 - M) \sum_{k=0}^{n-1} M^k = \frac{1}{n}(I_3 - M^n)$$

le serait aussi et en particulier, la suite $\frac{1}{n}M^n$ serait convergente, ce qui n'est clairement pas le cas, vu l'expression trouvée à la question précédente.

- G. 1. *Wow, des permutations maintenant et le symbole de Kronecker...qui n'est pas expliqué, c'est mal...*

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Autrement dit, la matrice A_σ a un 1 par ligne. Sur la ligne i , le 1 est situé sur la colonne de même rang que $\sigma(i)$, l'image par i de la permutation

2. Notons $A_\sigma = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, $A_\tau = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $A_\sigma A_\tau = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. D'après le cours, on a

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^n \underbrace{\delta_{i,\sigma(k)} \delta_{k,\tau(j)}}_{=0 \text{ si } i \neq \sigma(k) \text{ ou } k \neq \tau(j) \text{ et } = 1 \text{ sinon}} \\ &= \delta_{i,\sigma(\sigma^{-1}(i))} \delta_{\sigma^{-1}(i),\tau(j)} = \delta_{\sigma^{-1}(i),\tau(j)} = \delta_{i,\sigma(\tau(j))} \end{aligned}$$

(la seule valeur de k pouvant donner autre chose que 0 est $k = \sigma^{-1}(i)$ et on a également $\sigma^{-1}(i) = \tau(j) \iff i = \sigma(\tau(j))$). En particulier, on obtient que la matrice $A_\sigma A_\tau$ a les mêmes coefficients que la matrice $A_{\sigma \circ \tau}$, de sorte que

$$A_\sigma A_\tau = A_{\sigma \circ \tau}$$

Pour info, les MP* font ce genre de question relativement souvent et ils en ont plusieurs comme cela à tous leurs ds... La, il valait mieux l'admettre peut être ^^

3. On a $A_{Id} = I_p$ (les 1 sont tous sur la diagonale principale) et comme $A_\sigma A_{\sigma^{-1}} = A_{\sigma \circ \sigma^{-1}} = A_{Id} = I_p$, nous remarquons que la matrice A_σ est inversible, d'inverse $A_{\sigma^{-1}}$.
4. Il y a $p!$ permutations de $\llbracket 1, p \rrbracket$ et il y a donc autant de matrices de permutation
5. Comme il n'y a qu'un nombre fini de matrices de permutations et comme les matrices $(A_\sigma)^n = A_{\sigma^n}$ sont toutes des matrices de permutation pour $n \geq 1$, il y en a au moins eux qui sont égales. autrement dit, il existe deux entiers distincts p et q tels que $(A_\sigma)^p = (A_\sigma)^q$. *Wow, on fait ce genre de raisonnement quand on fait de la théorie des groupes... ça a l'air fun fun la prépa ECS à St Louis...*
6. Comme $(A_\sigma)^p = (A_\sigma)^q$ et comme ces matrices sont inversibles, on remarque que

$$(A_\sigma)^p ((A_\sigma)^q)^{-1} = I_r = (A_\sigma)^p (A_\sigma)^{-q} = (A_\sigma)^{p-q}$$

En particulier, il existe un entier $r = p - q \neq 0$ tel que $(A_\sigma)^r = I_p$ en prenant pour p le plus grand des deux entiers et pour q le plus petit des entiers, on obtient également que $r = q - p > 0$ de sorte que $r \geq 1$

7. La suite $(A_\sigma)^n$ est r -périodique car

$$(A_\sigma)^{n+r} = (A_\sigma)^n (A_\sigma)^r = (A_\sigma)^n I - r = (A_\sigma)^n \quad (n \geq 1)$$

8. Bon, la je crois que l'auteur souhaite nous voir faire un raisonnement avec les matrices identique à celui utilisé pour obtenir le lemme au 1 (que l'on a jamais utilisé). Si on fait le parallèle, la suite $(A_\sigma)^n$ est r -périodique et donc $P_n(A_\sigma)$ est sensé converger d'après le lemme vers $y = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{r-1} (A_\sigma)^k$, etc... bref, passons à l'exercice

Correction de l'exercice

Préparons nous à un festival de méthode MARRE

A. Soit $k \in \mathbb{N}$.

- Montrons que $N_k \subset N_{k+1}$. Soit $x \in N_k = \ker(f^k)$. Alors $f^k(x) = 0$ de sorte que $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0) = 0$ et par conséquent $x \in \ker(f^{k+1}) = N_{k+1}$. CQFD
- Montrons que $I_{k+1} \subset I_k$. Soit $y \in I_{k+1} = \text{Im}(f^{k+1})$. Alors il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f^{k+1}(x)$ et alors, on remarque que $y = f^k(f(x)) \in \text{Im}(f^k) = I_k$. CQFD

- B. Supposons qu'il n'existe pas d'entiers $p \leq n$ tel que $N_p = N_{p+1}$. Alors la suite croissante de noyau $N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset \dots \subset N_n \subset N_{n+1}$ est strictement croissante (aucun noyau n'est égale au suivant), de sorte qu'en prenant leur dimension, on obtient que

$$\dim(N_1) < \dim(N_2) < \dim(N_3) < \dots < \dim(N_{n+1})$$

Mais alors, on obtient une suite strictement croissante de $n+1$ entiers de $\llbracket 0, n \rrbracket$. De sorte que $\dim(N_1) = 0$, d'où f est injective et donc bijective mais dans ce cas tous les noyaux N_k valent $\{0\}$ et on a notre contradiction... CQFD, il existe au moins un entier $p \leq n$ tel que $N_p = N_{p+1}$. Il y a une idée importante à retenir ici : quand une application f a un noyau de dimension non nulle, les noyaux itérés de f ont une dimension qui augmente strictement puis qui devient constante

- C. $I_{p+1} = I_p$ d'après a) Et il résulte du théorème du rang que

$$\dim(I_{p+1}) = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(N_{p+1}) = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(N_p) = \dim(I_p)$$

Comme les noyaux ont même dimension finie et l'un est inclus dans l'autre, on a $I_{p+1} = I_p$.

- D. Pour $k \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la proposition $\mathcal{P}_k : N_{p+k} = N_p$.

- Les propositions $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies d'après le résultat de la question b
- Supposons la proposition $\mathcal{P}_k$ pour un entier $k \geq 0$.

Rappelons que $N_k \subset N_{p+k+1}$ (suite croissante de noyaux) et montrons maintenant que $N_{p+k+1} \subset N_p$.

Soit $x \in N_{p+k+1} = \ker(f^{p+k+1})$. alors, on a $0 = f^{p+k+1}(x) = f^{p+k}(f(x))$. A fortiori, $f(x) \in \ker(f^{p+k}) = N_{p+k} = N_p = \ker(f^p)$ de sorte que

$$0 = f^p(f(x)) = f^{p+1}(x).$$

En particulier $x \in \ker(f^{p+1}) = N_{p+1} = N_p$. CQFD

En conclusion, $N_{p+k+1} \subset N_p$ et $N_p = N_{p+k+1}$ de sorte que la proposition $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie

En conclusion, la proposition $\mathcal{P}_k$ est vraie pour $k \in \mathbb{N}$.

E. On remarque que $N_p \cap I_p = \{0\}$. En effet, si $y \in N_p \cap I_p$, alors $f^p(y) = 0$ et il existe un $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f^p(x)$ mais alors $0 = f^p(y) = f^p(f^p(x)) = f^{2p}(x)$ et donc $x \in N_{2p} = N_p$ de sorte que $y = f^p(x) = 0$. . En particulier, nous obtenons que $I_p \oplus N_p$. Par ailleurs, il résulte du théorème du rang appliqué à la fonction f^p que $\dim(\mathbb{R}^n) = \dim \ker(f^p) + \dim(\operatorname{Im}(f^p)) = \dim N_p + \dim I_p = \dim(N_p \oplus I_p)$. Comme $I_p \oplus N_p \subset \mathbb{R}^n$, il vient

$$\mathbb{R}^n = I_p \oplus N_p$$

magnifique...