Exercice 1 — Partie I

1. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $e^x \neq 1$ donc f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur ces deux intervalles. De plus, pour $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2} = \dfrac{(1-x)e^x - 1}{(e^x-1)^2}$.

b) Sur $\mathbb{R}^*$, f est continue car dérivable. Par ailleurs, en 0, sachant que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$ on constate que $f(x) = \dfrac{x}{e^x-1} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 = f(0)$ de sorte que f est également continue en ce point.

2. a) u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = -xe^x$.

Donc $u'(x)$ est du signe de $-x$ et les variations de u sont données par le tableau ci-contre

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	
u		$\nearrow$	$u(0)=0$	$\searrow$	

b) Pour $x \neq 0$, on a $f'(x) = \dfrac{u(x)}{(e^x-1)^2}$ de sorte que $f'(x)$ est du signe de $u(x)$, à savoir strictement négatif au vu du tableau ci-dessus.

c)

- En $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x - 1 = -1$ donc par quotient de limites $f(x) = \dfrac{x}{e^x-1} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- En $+\infty$: $f(x) = \dfrac{x}{e^x}\dfrac{1}{1-e^{-x}}$, donc par croissances comparées et produits des limites $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \times 1 = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

d) On constate que $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{e^x-1} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -1$. Calculons la différence $f(x) - (-x) = f(x) + x = \dfrac{x}{e^x-1} + x = \dfrac{xe^x}{e^x-1}$. Aussi sait-on par croissances comparées que $xe^x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ donc, par quotient des limites, $f(x) - x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.
Par conséquent la droite d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$.

e) *En plus de la courbe, est attendu le tracé : de l'asymptote en $-\infty$, de l'asymptote horizontale $y = 0$ en $+\infty$ (ou du moins pour cette dernière un tracé clair de la courbe qui traduit le fait que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$).*

Partie II

1. Pour $x \neq 0$, on a $f(x) = x \iff \dfrac{x}{e^x-1} = x \iff e^x - 1 = 1 \iff e^x = 2 \iff x = \ln 2$.
Par ailleurs $f(0) \neq 0$ de sorte que l'équation $f(x) = x$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution, $\alpha = \ln 2$.

2. a) Pour $x \in \mathbb{R}_+$, posons $g(x) = e^{2x} - 2xe^x - 1$. On sait que $g(0) = 0$ donc il suffit de prouver que g est croissante pour prouver qu'elle est positive sur $\mathbb{R}_+$.
Aussi la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) = 2e^{2x} - 2e^x - 2xe^x = 2e^x(e^x - 1 - x)$ de sorte que $g'(x)$ est du signe de $e^x - 1 - x$.
Notant $h(x)$ cette dernière quantité, la fonction h ainsi définie est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a $h'(x) = e^x - 1 \geq 0$.
Par conséquent h est croissante sur $\mathbb{R}_+$ de sorte que pour tout $x \geq 0$, $h(x) \geq h(0) = 0$.
Ainsi g' est positive sur $\mathbb{R}_+$ et g est croissante ce qui, comme annoncé plus haut, achève donc la preuve.

b) Le résultat s'obtient par un simple calcul.

c) Le **2b)** de la partie I donne $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $]0, +\infty[$.
En outre la question précédente assure que, lorsque $x > 0$, $f'(x) + x$ est du signe de $e^{2x} - 2xe^x - 1$, quantité positive d'après **2a)** ce qui prouve que $f'(x) \geq -\frac{1}{2}$.

d) Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de α on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \alpha = f(u_n) - f(\alpha)$. Appliquons l'inégalité des accroissements finis pour estimer cette différence :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on sait d'après la question précédente que $|f'(x)| = -f'(x) \leq \frac{1}{2}$.
- Le réel $\alpha = \ln 2$ est bien dans $\mathbb{R}_+$. Aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = f(u_{n-1}) > 0$ car $f > 0$ sur $\mathbb{R}$ et on a également $u_0 = 1 \in \mathbb{R}_+^*$.

L'inégalité des accroissements finis assure ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

3. Une récurrence immédiate assure : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|1 - \alpha|$.
Reste ensuite à prouver que $|1 - \alpha| = 1 - \alpha$ c'est à dire que $1 - \alpha \geq 0$, ce qui est bien le cas puisque $\alpha = \ln 2 < 1$.

4. Comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, $\frac{1}{2^n}(1-\alpha) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc, comme $0 \leq |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}(1-\alpha)$, on en déduit par encadrement que $|u_n - \alpha| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

5.
```
u=1;
n=0;
alpha=log(2);
    while (abs(u-alpha)>=1E-9)
        u=u/(exp(u)-1);
        n=n+1;
```

```
    end
disp(n,"Le premier entier tel que u_n < 10^(-9) est :")
```

Exercice 2 — 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f(x) = x^x = \exp(x\ln x)$. La fonction f est donc dérivable (et par conséquent continue) sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonction dérivables.

2. On sait par croissances comparées que $x\ln x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ de sorte que par composition et continuité de l'exponentielle $f(x) = e^{x\ln x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} e^0 = 1 = f(0)$. Donc f est continue en 0.
Aussi, pour $x \in]0,1[$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{e^{x\ln x}-1}{x} = \ln x\dfrac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}$. Or on sait que $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x} = \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{e^u-1}{u} = 1$ donc, par produit des limites en 0, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$. La fonction f n'est donc pas dérivable en 0 (tangente verticale).

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = (\ln x + 1)e^{x\ln x} = (\ln x+1)x^x$ donc $f'(x)$ est du signe de $\ln x + 1$:
$f'(x) > 0 \iff \ln x > -1 \iff x > e^{-1} = \frac{1}{e}$.
En outre, par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Enfin $f(e^{-1}) = (e^{-1})^{e^{-1}} = e^{-e^{-1}} = e^{-\frac{1}{e}}$.
Le tableau de variation figure ci-contre.

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$e^{-1/e}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. g est continue sur $I = [\frac{1}{e}, +\infty[$ et strictement croissante car $g'(\frac{1}{e}) = 0$ puis $g'(x) = f'(x) > 0$ pour tout $x > \frac{1}{e}$.
Ainsi, par le théorème de la bijection $g(I) = [g(\frac{1}{e}), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)[= [e^{-1/e}, +\infty[$ et g réalise une bijection de I sur $J = g(I)$.

5. On sait que pour tout $x \in J$, $x = g\circ g^{-1}(x) = g(g^{-1}(x)) = f(g^{-1}(x)) = (g^{-1}(x))^{g^{-1}(x)}$. L'application $\varphi = g^{-1}$ convient donc.

6. Pour $x \in J$, on a $\varphi(x)^{\varphi(x)} = x$ donc $\varphi(x)\ln(\varphi(x)) = \ln x$ et ainsi $\dfrac{\ln x}{\varphi(x)} = \ln(\varphi(x))$ ($\varphi(x) \neq 0$ car φ est à valeurs dans $[\frac{1}{e}, +\infty[$).
Par ailleurs, φ étant croissante, on a $[e^{-1/e}, +\infty[= \varphi(I) = [\varphi(e^{-1/e}), \lim\limits_{x\to+\infty}(\varphi(x))[$ et donc $+\infty = \lim\limits_{x\to+\infty}(\varphi(x))$.
Par suite $\dfrac{\ln x}{\varphi(x)} = \ln(\varphi(x)) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc $\dfrac{\varphi(x)}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

7. Vu que g est dérivable sur I, pour tout point $y = g(x) \in J$, on sait d'après le cours que $\varphi = g^{-1}$ est dérivable en y si et seulement $g'(x) \neq 0$. Or pour tout $x \in I$, on a $g'(x) = 0 \iff f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{e}$. Par conséquent g' est dérivable en tout point $y \in J$ tel que $y \neq g(\frac{1}{e}) = e^{-1/e}$ de sorte que $K =]e^{-1/e}, +\infty[$.
Par ailleurs la formule de dérivation des fonctions réciproques donne, pour tout $y \in K$:
$\varphi'(y) = (g^{-1})'(y) = \dfrac{1}{g'(g^{-1}(y))} = \dfrac{1}{(1+\ln(\varphi(x)))\varphi(x)^{\varphi(x)}} = \dfrac{1}{(1+\ln(\varphi(x)))x}$ et, comme noté précédemment, $\ln(\varphi(x)) = \dfrac{\ln x}{\varphi(x)}$

8. L'équation de $\mathcal{T}_n$ s'écrit $y = \varphi(n) + \varphi'(n)(x-n)$ donc u_n est donné par $0 = \varphi(n) + \varphi'(n)(u_n - n)$ d'où $u_n = n - \dfrac{\varphi(n)}{\varphi'(n)}$. En utilisant l'expression de **7.** pour $\varphi'(n)$, il vient $u_n : n - n\varphi(n) - n\ln n$ et $\dfrac{u_n}{-n\ln n} = -\dfrac{1}{\ln n} + \dfrac{\varphi(n)}{\ln n} + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ (en utilisant **6.**).

Exercice 3 — 1. a) $PD = \begin{pmatrix} 1 & q & q^2 \\ -2 & p-q & 2pq \\ 1 & -p & p^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{q}{2} & q^2 \\ 0 & \frac{p-q}{2} & 2pq \\ 0 & -\frac{p}{2} & p^2 \end{pmatrix}$.

b) $MP = \begin{pmatrix} q-q & q^2 + \frac{pq-q^2}{2} & q^3 + pq^2 \\ p-1+q & pq + \frac{p-q}{2} - pq & pq^2 + pq + qp^2 \\ -p+p & \frac{p^2-pq}{2} - p^2 & p^2q + p^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{q(p+q)}{2} & q^2(q+p) \\ p+q-1 & \frac{p-q}{2} & pq(q+1+p) \\ 0 & \frac{-p(p+q)}{2} & p^2(q+p) \end{pmatrix}$.
Tenant compte de ce que $p + q = 1$, on constate que l'on a bien $MP = PD$.

2. a) A l'étape 0, deux pilules bleues sont sur la table donc A_0 est certain et B_0 et C_0 sont impossibles :$a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = 0$.
Par ailleurs, vu l'étape 0, l'événement A_1 est en fait « poser une pilule bleue sur la table », donc $a_1 = q$.
De même l'événement B_1 revient à poser une pilule rouge sur la table, sa probabilité vaut $b_1 = p$.
Enfin C_1 est impossible car, de l'étape 0 à l'étape 1, on ne remplace qu'une des deux pilules bleues donc, à l'étape 1, il en reste au moins une sur la table : $c_1 = 0$.

b) Supposons être à l'étape k ($k \in \mathbb{N}^*$) et considérons les événements E :« Retirer une pilule rouge de la table » et F : « Poser une pilule rouge sur la table ». Notons d'emblée que E et F sont indépendants et que, indépendamment des pilules sur la table $P_{A_k}(F) = P_{B_k}(F) = P_{C_k}(F) = P(F) = p$.

- $P_{A_k}(A_{k+1})$: Sachant A_k, l'événement A_{k+1} est réalisé si et seulement si l'on repose une pilule bleue sur la table $P_{A_k}(A_{k+1}) = P_{A_k}(\overline{F}) = 1 - p = q$.
- $P_{B_k}(A_{k+1})$: Sachant B_k, l'événement A_{k+1} est réalisé si et seulement si l'on retire la pilule rouge puis repose une pilule bleue sur la table $P_{B_k}(A_{k+1}) = P_{B_k}(E \cap \overline{F})$. Par indépendance de E et F et donc de E et $\overline{F}$ on a $P_{B_k}(A_{k+1}) = P_{B_k}(E)P_{B_k}(\overline{F}) = qP_{B_k}(E)$.
  Enfin, sachant B_k, puisque la pilule retirée est choisie au hasard : $P_{B_k}(E) = \frac{1}{2}$.
  Par conséquent $P_{B_k}(A_{k+1}) = \frac{q}{2}$.
- $P_{C_k}(A_{k+1})$: Sachant C_k, l'événement A_{k+1} est impossible (car seule une des deux pilules rouges est remplacée) donc $P_{C_k}(A_{k+1}) = 0$.

A ce stade, il peut être judicieux de constater que les probabilités obtenues correspondent aux coefficients de la première ligne de M. Cela peut aider à deviner les valeurs à obtenir pour les six autres probabilités ; ce que confirme le résultat que l'on demande de montrer à la question suivante !

- $P_{A_k}(B_{k+1})$: Sachant A_k, l'événement B_{k+1} est réalisé si et seulement si on repose une pilule rouge sur la table $P_{A_k}(B_{k+1}) = P_{A_k}(F) = p$.
- $P_{B_k}(B_{k+1})$: Sachant B_k, l'événement B_{k+1} est réalisé si et seulement si la pilule reposée sur la table est de même couleur que la pilule que l'on retire ; autrement dit $P_{B_k}(B_{k+1}) = P_{B_k}((E \cap F) \cup (\overline{E} \cap \overline{F})$.
  L'union impliquée étant disjointe, on est en droit d'écrire $P_{B_k}(B_{k+1}) = P_{B_k}(E \cap F) + P_{B_k}(\overline{E} \cap \overline{F})$,
  par indépendance on a donc $P_{B_k}(B_{k+1}) = P_{B_k}(E)P_{B_k}(F) + P_{B_k}(\overline{E})P_{B_k}(\overline{F}) = pP_{B_k}(E) + qP_{B_k}(\overline{E})$.
  Enfin, sachant B_k, puisque la pilule retirée est choisie au hasard : $P_{B_k}(E) = P_{B_k}(\overline{E}) = \frac{1}{2}$.
  Par suite $P_{B_k}(B_{k+1}) = \frac{p+q}{2} = \frac{1}{2}$.
- $P_{C_k}(B_{k+1})$: De même que pour $P_{A_k}(B_{k+1})$, on a $P_{C_k}(B_{k+1}) = P(\overline{F}) = q$.
- $P_{A_k}(C_{k+1}) = 0$ car sachant A_k, l'une des deux pilules bleues sera encore sur la table à l'étape $k+1$.
- $P_{B_k}(C_{k+1}) = P_{B_k}(\overline{E} \cap F) = \frac{p}{2}$ (même raisonnement que pour $P_{B_k}(A_{k+1})$)
- $P_{C_k}(C_{k+1}) = P(F) = p$ (même raisonnement que pour $P_{A_k}(A_{k+1})$)

Notons pour conclure que toutes ses probabilités conditionnelles n'ont de sens que lorsque les événements conditionnants sont de probabilités non nulles.

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On considère le s.c.e. (A_k, B_k, C_k) de probabilités non nulles [1]. La formule des probabilité totale donne alors, en utilisant les valeurs trouvées à la question précédente :
$a_{k+1} = P(A_{k+1}) = P_{A_k}(A_{k+1})P(A_k) + P_{B_k}(A_{k+1})P(B_k) + P_{C_k}(A_{k+1})P(C_k) = qa_k + \frac{q}{2}b_k + 0$.
De même $b_{k+1} = pa_k + \frac{1}{2}b_k + qc_k$ et $c_{k+1} = 0 + \frac{p}{2}b_k + pc_k$.
Matriciellement on a bien $\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qa_k + \frac{q}{2}b_k + 0 \\ pa_k + \frac{1}{2}b_k + qc_k \\ 0 + \frac{p}{2}b_k + pc_k \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}$.

d) On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.
Pour $k = 1$, $PD \begin{pmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 1 \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} q \\ p-q \\ -p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q^2 \\ 2pq \\ p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (p+q)q \\ p(p+q) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ p \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = U_1$.
Supposant $U_k = PD^k \begin{pmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{pmatrix}$ on a alors $U_{k+1} = MU_k = MPD^k \begin{pmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{pmatrix} = PDD^k \begin{pmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{pmatrix} = PD^{k+1} \begin{pmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{pmatrix}$.

e) D étant diagonale, on a $D^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = PD^k \begin{pmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{p}{2^{k-1}} \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc $\begin{cases} a_k = pq(\frac{1}{2})^{k-1} + q^2 \\ b_k = p(p-q)(\frac{1}{2})^{k-1} + 2pq \\ c_k = -p^2(\frac{1}{2})^{k-1} + p^2 \end{cases}$.

Vu que $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, $(\frac{1}{2})^{k-1} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et on obtient $\lim\limits_{k \to +\infty} a_k = q^2$, $\lim\limits_{k \to +\infty} b_k = 2pq$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} c_k = p^2$.

Exercice 4 — Partie I

1. On a $B = I - A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. On applique la méthode du système linéaire : considérant un second membre quelconque $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Le système $BX = Y$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ s'écrit $BX = Y \iff \begin{cases} -x + y + z = a \\ -x + 3y - z = b \\ 3x - 3y + z = c \end{cases}$.

1. En tout rigueur, cela n'est vrai que pour $k \geq 2$ car, pour $k = 1$, on a $P(C_1) = 0$. Dans ce cas, le raisonnement s'adapte aisément en considérant le s.c.e (A_1, B_1).

Tous calculs faits on obtient $BX = Y \iff \begin{cases} x = \phantom{\frac{1}{4}a+{}} \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c \\ y = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c \\ z = \frac{3}{4}a \phantom{{}+\frac{1}{2}b} + \frac{1}{4}c \end{cases}$. Le système $BX = Y$ étant de Cramer sans condition sur Y, on en déduit que B est inversible. De plus, la solution obtenue permet de déduire que $B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. a) On obtient $LM = ML = 0$, $L^2 = 3L$ et $M^2 = 3M$.

b) Les relations : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $L^n = 3^{n-1}L$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = 3^{n-1}M$ s'obtient sans peine par récurrence en utilisant pour l'hérédité le fait que $L^2 = 3L$ et $M^2 = 3M$.

c) *Deux méthodes sont possibles : utiliser la formule du binôme ou raisonner par récurrence. Je ne détaille que la première.* Commençons par constater que l'on a $A = L - M$. Vu que L et M commutent, on en droit d'appliquer la formule du binôme qui donne $A^n = (L-M)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} L^k (-1)^{n-k} M^{n-k}$.

Aussi a-t-on, pour $k \geq 1$ et $n - k \geq 1$ *i.e.* pour $1 \leq k \leq n-1$: $L^k M^{n-k} = (3^{k-1}L)(3^{n-k-1}M) = 3^{n-2}LM = 0$, si bien que les termes correspondants dans la somme précédente sont nuls.

Il reste donc $A^n = \binom{n}{0} L^0 \times (-1)^n M^n + \binom{n}{n} L^n (-1)^0 M^0 = (-1)^n \times 3^{n-1}M + 3^{n-1}L = -(-3)^{n-1}M + 3^{n-1}L$.

d) On utilise la relation précédente pour $k \geq 1$:

$S_n = I + \sum_{k=1}^{n-1}(3^{k-1}L - (-3)^{k-1}M) = I + (\sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1}) \times L - (\sum_{k=1}^{n-1}(-3)^{k-1}) \times M$.

Reste à calculer (dans $\mathbb{R}$!) la valeur des deux sommes géométriques :

on a $\sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1} \underset{j=k-1}{=} \sum_{j=0}^{n-2} 3^j = \dfrac{1 - 3^{n-1}}{1-3} = \dfrac{3^{n-1}-1}{2}$ et de même $\sum_{k=1}^{n-1}(-3)^{k-1} \underset{j=k-1}{=} \sum_{j=0}^{n-2}(-3)^j = \dfrac{1-(-3)^{n-1}}{1-(-3)} = \dfrac{1-(-3)^{n-1}}{4}$.

On obtient ainsi : $S_n = I + \dfrac{3^{n-1}-1}{2}L - \dfrac{1-(-3)^{n-1}}{4}M$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vu que B est inversible il s'agit de prouver que $BS_n = (I - A^n)$. Or, vu les expressions de B et de S_n :

$BS_n = (I-A)S_n = S_n - AS_n = \sum_{k=0}^{n-1} A^k - A\sum_{k=0}^{n-1} A^k = \sum_{k=0}^{n-1} A^k - \sum_{k=0}^{n-1} A^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} A^k - \sum_{j=1}^{n} A^j = I - A^n$ (par téléscopage pour la dernière).

Partie II

1. a) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n = 1$, on a $A^1 X_0 + S_1 U = AX_0 + IU = AX_0 + U = X_1$ (par définition de X_1).

Ensuite, si $X_n = A^n X_0 + S_n U$, alors on a $X_{n+1} = AX_n + U = A(A^n X_0 + S_n U) + U = A^{n+1}X_0 + AS_n U + U = A^{n+1}X_0 + (AS_n + I)U$.

Or $I + AS_n = I + A\sum_{k=0}^{n-1} A^k = I + \sum_{k=0}^{n-1} A^{k+1} \underset{j=k+1}{=} I + \sum_{j=1}^{n} A^j = \sum_{j=0}^{n} A^j = S_{n+1}$ ce qui achève la preuve d'hérédité et la preuve par récurrence.

b) On sait que $A^n = 3^{n-1}L - (-3)^{n-1}M$ et que $S_n = I + \dfrac{3^{n-1}-1}{2}L - \dfrac{1-(-3)^{n-1}}{4}M$ de sorte que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$X_n = A^n X_0 + S_n U = 3^{n-1}LX_0 - (-3)^{n-1}MX_0 + U + \dfrac{3^{n-1}-1}{2}LU - \dfrac{1-(-3)^{n-1}}{4}MU$.

Calculant les produits LX_0, MX_0, LU et MU et sommant les matrices colonnes on obtient $X_n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 14 \times 3^n - 18 \\ -5 \times (-3)^n - 29 \\ -14 \times 3^n + 11 \times (-3)^n + 5 \end{pmatrix}$.

2. a) La méthode du système linéaire donne $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $Z_n = P^{-1}Y_n = P^{-1}(AY_{n-1} + V_n) = P^{-1}AY_{n-1} + P^{-1}V_n$.

Or on sait que $Y_n = PZ_n$ donc $Z_n = P^{-1}APZ_{n-1} + P^{-1}V_n$. Posant $D = P^{-1}AP$ et $W_n = P^{-1}V_n$, on obtient par un calcul explicite calcul (possible car P^{-1} est connue) : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $W_n = \begin{pmatrix} -7n \\ 0 \\ 8n \end{pmatrix}$.

c) On a $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = Z_n = DZ_{n-1} + W_n = D\begin{pmatrix} 0 \\ 3v_{n-1} \\ -3w_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7n \\ 0 \\ 8n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7n \\ 3v_{n-1} \\ -3w_{n-1} + 8n \end{pmatrix}$, d'où le résultat.

d) Pour $n \in \mathbb{N}$, on constate sans peine que $p_n = -3p_{n-1} + 8n$.

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n = w_n - p_n = (-3w_{n-1} + 8n) - (-3p_{n-1} + 8n) = -3(w_{n-1} - p_{n-1}) = -3q_{n-1}$. La suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison (-3).

e) On sait que $u_n = 7n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par ailleurs, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3 et donc $v_n = 3^n v_0 = 3^n \times 6 = 3^{n+2}$. Enfin, $w_n = p_n + q_n$ où $p_n = 2n + \frac{3}{2}$ et où $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison trois et de premier terme $q_0 = w_0 - \frac{3}{2} = -3 - \frac{3}{2} = -\frac{9}{2}$ de sorte que $w_n = 2n + \frac{3}{2} - \frac{(-3)^{n+2}}{2}$ donc $Z_n = \begin{pmatrix} 7n \\ 3^{n+2} \\ 2n + \frac{3}{2} - \frac{(-3)^{n+2}}{2} \end{pmatrix}$ et $Y_n = PZ_n = \begin{pmatrix} \frac{3^{n+2}-7n}{2} \\ -3n - \frac{(-3)^{n+1}+3}{2} \\ \frac{4}{3} - 3^{n+1}(1 + \frac{(-1)^n}{2}) \end{pmatrix}$.