DEVOIR MAISON N° 13 – CORRIGÉ

EXERCICE 1 – RÉVISIONS DE PROBABILITÉS - ECRICOME 2007 E

1. (a) On a $S(\Omega) = \{0,1\}$ et $U(\Omega) = \{0,1\}$.
Les événements $[U = 0]$ et $[U = 1]$ forment un système complet d'événements. On a donc

$$P(S = 0) = P([S = 0] \cap [U = 0]) + P([S = 0] \cap [U = 1]) = 0,7$$

$$P(S = 1) = P([S = 1] \cap [U = 0]) + P([S = 1] \cap [U = 1]) = 0,3$$

Ainsi, $\boxed{S \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } 0,3.}$
De même, les événements $[S = 0]$ et $[S = 1]$ forment un système complet d'événements. On a donc

$$P(U = 0) = P([U = 0] \cap [S = 0]) + P([U = 0] \cap [S = 1]) = 0,6$$

$$P(U = 1) = P([U = 1] \cap [S = 0]) + P([U = 1] \cap [S = 1]) = 0,4$$

Ainsi, $\boxed{U \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } 0,4.}$

La probabilité que le client règle par carte bancaire est $\boxed{P(U = 0) = 0,6 = \frac{3}{5}.}$

(b) Les variables S et U sont indépendantes si,

$$\forall (i, j) \in \{0,1\}^2,\ P([S = i] \cap [U = j]) = P(S = i)P(U = j)$$

Or, $P([S = 0] \cap [U = 0]) = 0,4 \neq 0,7 \times 0,6 = P(S = 0)P(U = 0)$.
Donc $\boxed{U \text{ et } S \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

(c) On cherche $P_{[U=1]}(S = 1)$. On a

$$\boxed{P_{[U=1]}(S = 1) = \frac{P([U = 1] \cap [S = 1])}{P(U = 1)} = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4}}$$

2. (a) L'expérience peut être considérée comme n réalisations indépendantes d'une même épreuve de Bernoulli (un client se présente à la caisse), dont le succès est « le client paye par carte bancaire », événement de probabilité $p = \frac{3}{5}$. La variable aléatoire C_n compte le nombre de succès, elle suit donc une loi binomiale de paramètres n et $\frac{3}{5}$: $\boxed{C_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, \frac{3}{5})}$. On a $\boxed{E(C_n) = \frac{3n}{5}}$ et $\boxed{V(C_n) = \frac{6n}{25}}$

(b) Notons A_k : « le k-ième client paye par carte » avec $P(A_k) = \frac{3}{5}$.
On a $\boxed{L_1(\Omega) = [\![0, n]\!]}$.

— $[L_1 = 0]$ est l'événement « aucun client ne paye par carte bancaire ».
Donc $[L_1 = 0] = [C_n = 0]$. Puisque C_n suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, \frac{3}{5})$,

$$\boxed{P(L_1 = 0) = \left(\frac{2}{5}\right)^n}$$

— Soit $k \in [\![1, n]\!]$. $[L_1 = k] = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$. Les événements A_i étant mutuellement indépendants, on a :

$$\boxed{P(L_1 = k) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\dots P(\overline{A_{k-1}})P(A_k) = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} P[L_1 = k] &= \left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{3}{5}\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{2}{5}\right)^\ell \\ &= \left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{3}{5}\,\frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \frac{2}{5}} = \left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

(c) On a $\boxed{L_2(\Omega) = [\![2, n]\!] \cup \{0\}}$

— $[L_2 = 0]$ est l'événement « un client ou moins paye par carte bancaire ».
Donc $[L_2 = 0] = [C_n = 0] \cup [C_1 = 1]$. Puisque C_n suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, \frac{3}{5})$,

$$\boxed{P(L_2 = 0) = \left(\frac{2}{5}\right)^n + n\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}}$$

— Soit $k \in [\![2, n]\!]$. L'événement $[L_2 = k]$ signifie que parmi les $k - 1$ premiers clients, un seul exactement a payé en carte bancaire (événement $[C_{k-1} = 1]$), et le k-ième client a payé en carte bancaire. $[L_2 = k] = [C_{k-1} = 1] \cap A_k$.

$$P(L_2 = k) = P(C_{k-1} = 1)P_{[C_{k-1}=1]}(A_k) = (k - 1)\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-2} \times \frac{3}{5}$$

$$\boxed{P(L_2 = k) = (k - 1)\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^{k-2}}$$

EXERCICE 2 – ANALYSE - D'APRÈS EML 2007 S

I - ÉTUDE DE L'APPLICATION f

1.
```
function y=f(x)
        if x==0 then
                y=1
        else
                y=log(1+x)/x
        end
endfunction
```

2. f est continue sur $]0,+\infty[$ comme produit de $x\mapsto \ln(1+x)$ et $x\mapsto \frac{1}{x}$ qui sont continues sur $]0,+\infty[$. De plus, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 = f(0)$ (limite usuelle, taux d'accroissement de $\ln en 1$), donc f est continue en 0. Ainsi, $\boxed{f \text{ est continue sur } [0;+\infty[}$.

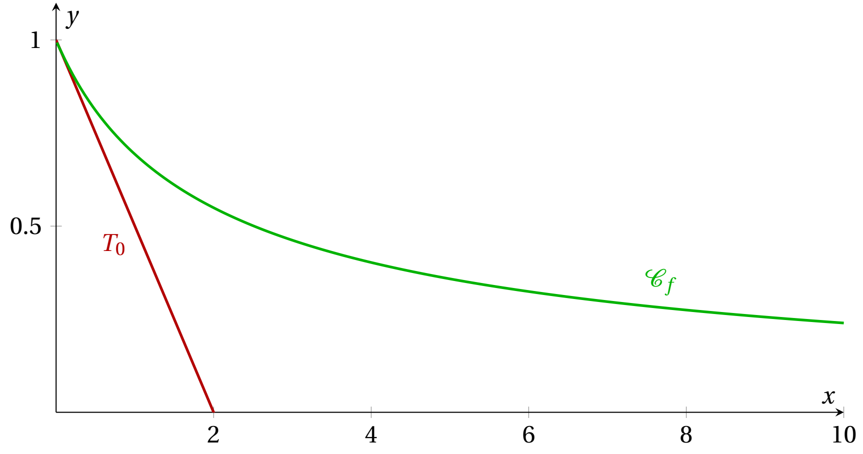
3. On considère l'application
$$A : [0;+\infty[\to\mathbb{R},\quad x\mapsto A(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$
(a) f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ comme produit de $x\mapsto\ln(1+x)$ et $x\mapsto\frac{1}{x}$ qui sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
$$\boxed{\forall x>0,\ f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x}x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{A(x)}{x^2}}$$
(b) Au voisinage de 0,
$$A(x) = x\times\frac{1}{1+x} - \ln(1+x) = x\left(1-x+x^2+o_{x\to0}(x^2)\right) - \left(x - \frac{x^2}{2} + o_{x\to 0}(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2} + o_{x\to0}(x^2)$$
Donc $A(x) \underset{x\to0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$. Par quotient, $f(x) = \frac{A(x)}{x^2}\underset{x\to0}{\sim} -\frac{1}{2}$ On en déduit que
$$\boxed{\lim_{x\to0^+} f(x) = -\frac{1}{2}}$$
(c) f est continue sur $[0,+\infty[$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $\lim_{x\to0^+} f'(x) = -\frac{1}{2}\in\mathbb{R}$. On en déduit que f est dérivable en 0 avec $\boxed{f'(0) = -\frac{1}{2}}$ et on a $\lim_{x\to0^+} f'(x) = f'(0)$ donc f' est continue en 0. On en déduit que $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0,+\infty[.}$
Attention, la continuité en 0 est importante pour appliquer le théorème de la limite de la dérivée.
(d) $x\mapsto\frac{x}{1+x}$ et $x\mapsto \ln(1+x)$ sont dérivables sur $[0,+\infty[$ donc par différence, A l'est aussi.
$$\forall x\geqslant 0,\ A'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = -\frac{x}{(1+x)^2}$$
Donc $A'(x)\leqslant 0$ pour tout $x\geqslant 0$ et $A'(x)=0$ si et seulement si $x=0$. On en déduit que A est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$. De plus, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x} = 1$ car $\frac{x}{1+x}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{x}{x} = 1$. On en déduit que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} A(x) = -\infty}$. Le tableau de variation de A est alors

x	0	$+\infty$
$A(x)$	0 ↘	$-\infty$

Pour tout $x>0$, $A(x) < A(0) = 0$, par stricte décroissance de A. Donc $f'(x) = \frac{A(x)}{x^2} < 0$. On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. De plus, f est continue en 0, donc $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } [0,+\infty[}$
(e) Soit $x>0$,
$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(x)+\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)}{x} = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)$$
Or,
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1}{x}+1\right) = 0$$
Donc
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

4. (a) La tangente T_0 à $\mathscr{C}_f$ en 0 à pour équation : $y = f'(0)x + f(0)$, donc $\boxed{T_0 : y = -\frac{x}{2}+1}$.
(b) Au voisinage de 0^+,
$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x}\times\ln(1+x) = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o_{x\to0}(x^3)\right) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o_{x\to0}(x^2)}$$
Ceci est un développement limité d'ordre 2 de f au voisinage de 0.

(c) On en déduit que $f(x) - \left(-\frac{x}{2}+1\right) = \frac{x^2}{3} + o_{x\to 0}(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{3}$ Or, $\frac{x^2}{3} \geqslant 0$ au voisinage de 0^+, donc $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est au dessus de } T_0 \text{ au voisinage de } 0^+}$.



(d)

(e)
```
N=100 // nombre de points
x=linspace(0,5,N)
y=[1] // initialisation avec f(0)
for k=2:N
    y(k)=log(1+x(k))/x(k)
    // ou
    //y=[y, log(1+x(k))/x(k)]
end
plot2d(x,y)
```

II - Un développement en série

1. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$

$$\sum_{k=0}^{N} (-1)^k t^k = \sum_{k=0}^{N} (-t)^k = \frac{1-(-t)^{N+1}}{1-(-t)} \qquad \text{car } -t \neq 1$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{N} (-1)^k t^k = \frac{1-(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t} = \frac{1}{1+t} - \frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}$$

et ainsi,

$$\boxed{\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}}$$

2. Soit $x \in [0,1]$. En intégrant la relation précédente entre 0 et x on a, par linéarité de l'intégrale

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \int_0^x t^k\,dt + \int_0^x \frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}\,dt$$

Or, $\int_0^x t^k\,dt = \frac{x^{k+1}}{k+1}$ et $\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \ln(1+x)$. Donc

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + J_N(x)}$$

3. Soient $N \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$. Par inégalité triangulaire sur $[0,x]$,

$$|J_N(x)| = \left|\int_0^x \frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}\,dt\right| \leqslant \int_0^x \left|\frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}\right|\,dt = \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1+t}\,dt$$

Or, pour tout $t \in [0,x]$, $0 \leqslant \frac{t^{N+1}}{1+t} \leqslant t^{N+1}$. Par croissance de l'intégrale sur $[0,x]$,

$$\boxed{|J_N(x)| \leqslant \int_0^x t^{N+1}\,dt = \frac{x^{N+2}}{N+2}}$$

4. Pour tout $x \in [0,1]$ et tout $N \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant |J_N(x)| \leqslant \frac{x^{N+2}}{N+2} \leqslant \frac{1}{N+2} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc $\lim_{N\to+\infty} J_N(x) = 0$. Or, d'après la question 2,

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x) - J_N(x)$$

Donc

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x) \in \mathbb{R}$$

De plus,

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{N+1} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$$

On en déduit que la série $\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} \text{ converge}}$ et que : $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = \ln(1+x)}$

EXERCICE 3 – ALGÈBRE - D'APRÈS EDHEC 2016 S

On considère f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et on note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.

1. On suppose dans cette question que $f \circ (f - \mathrm{id})^2 = 0$.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. $(f-\mathrm{id})^2(x) + f\big((2\mathrm{id} - f)(x)\big) = f^2(x) - 2f(x) + x + 2f(x) - f^2(x) = x$
   (b) Soit $y \in \mathbb{R}^n$. $f^3(y) - 2f^2(y) + f(y) = f\big(f^2(y) - 2f(y) + y\big) = f \circ (f-\mathrm{id})^2(y) = 0_{\mathbb{R}^n}$ car $f \circ (f-\mathrm{id})^2 = 0$
   (c) On a $\{0_{\mathbb{R}^n}\} \subset \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ car $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
   Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ alors il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = f(y)$ et $f(x) = 0_{R^n}$. On a : $f^2(y) = f(f(y)) = f(x) = 0_{R^n}$ et $f^3(y) = f(f^2(y)) = f(0_{R^n}) = 0_{R^n}$. Or, d'après ce qui précède, $f^3(y) - 2f^2(y) + f(y) = 0_{\mathbb{R}^n}$. On obtient $f(y) = 0_{\mathbb{R}^n}$, donc $x = 0_{\mathbb{R}^n}$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \subset \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Par double inclusion, $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}}$.
   (d) On a $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^n$.
   Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrons qu'il peut s'écrire $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ et $x_2 \in \mathrm{Im}(f)$.
   D'après la question (a), $x = (f-\mathrm{id})^2(x) + f\big((2\mathrm{id} - f)(x)\big)$.
   Posons alors $x_1 = (f-\mathrm{id})^2(x)$ et $x_2 = f\big((2\mathrm{id} - f)(x)\big)$. On a bien :
   — $x = x_1 + x_2$;
   — $f(x_1) = f \circ (f-\mathrm{id})^2(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ car $f \circ (f-\mathrm{id})^2 = 0$, donc $x_1 \in \mathrm{Ker}(f)$;
   — $x_2 = f\big((2\mathrm{id} - f)(x)\big) \in \mathrm{Im}(f)$ car c'est l'image de $(2\mathrm{id} - f)(x) \in \mathbb{R}^n$.
   Ainsi, $x \in \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$. On a montré l'inclusion : $\mathbb{R}^n \subset \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$.
   Par double-inclusion, $\boxed{\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)}$.
   (e) On a $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, donc $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont en somme directe. De plus, $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$, donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f) \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}^n.}$
2. On suppose dans cette question que :
$$f \circ (f - \mathrm{id}) \circ (f - 4\mathrm{id}) = 0$$
   (a) On peut poser $P(X) = aX + b$, puis on trouve en identifiant : $a = -\frac{1}{4}$ et $b = \frac{5}{4}$.
   Conclusion : $P(X) = -\frac{1}{4}X + \frac{5}{4}$.
   (b) On reprend le raisonnement des questions 1.c et 1.d.
      i. Montrons que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
      On a déjà $\{0_{\mathbb{R}^n}\} \subset \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.
      Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ alors il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = f(y)$ et $f(x) = 0_{R^n}$ et on a $f^2(y) = 0_{R^n}$ et $f^3(y) = 0_{R^n}$. Or, $0_{\mathbb{R}^n} = f \circ (f - \mathrm{id}) \circ (f - 4\mathrm{id})(y) = f^3(y) - 5f^2(y) + 4f(y) = 4x$. Donc $x = 0_{\mathbb{R}^n}$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \subset \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
      Par double inclusion, $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}.}$
      ii. Montrons que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$.
      On a déjà $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^n$.
      Soit $x \in \mathbb{R}^n$. D'après la question (a), $x = \dfrac{1}{4}(f - \mathrm{id}) \circ (f - 4\mathrm{id})(x) + f\big(P(f)(x)\big)$.
      Posons alors $x_1 = \dfrac{1}{4}(f - \mathrm{id}) \circ (f - 4\mathrm{id})(x)$ et $x_2 = f\big(P(f)(x)\big)$. On a bien :
      — $x = x_1 + x_2$;
      — $f(x_1) = \dfrac{1}{4} f \circ (f - \mathrm{id}) \circ (f - 4\mathrm{id})(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ car $f \circ (f - \mathrm{id}) \circ (f - 4\mathrm{id}) = 0$, donc $x_1 \in \mathrm{Ker}(f)$;
      — $x_2 \in \mathrm{Im}(f)$ car c'est l'image de $P(f)(x) \in \mathbb{R}^n$.
      Ainsi, $x \in \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$. On a montré l'inclusion : $\mathbb{R}^n \subset \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$.
      Par double-inclusion, $\boxed{\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)}$.

   Ces deux points montrent que $\boxed{\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)}$.
3. Dans cette question f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et P est un polynôme annulateur de f (ie. $P(f) = 0$), dont le degré est égal à p (avec $p \geqslant 2$), et tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.
   (a) $P \in \mathbb{R}_p[X]$, il existe donc $(a_0, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_pX^p$. De plus $P(0) = a_0$ et $P'(0) = a_1$. Donc d'après l'énoncé, $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$.
   (b) Si $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$, comme précédemment, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = f(y)$ et $f(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ (remarque : et plus généralement $f^k(y) = 0$ pour tout entier $k \geqslant 2$).
   P étant annulateur de f, on a $P(f)(y) = 0$, soit : $a_1f(y) + \cdots + a_pf^p(y) = 0_{\mathbb{R}^n}$ et donc d'après la remarque précédente : $a_1f(y) = 0$. Or, $a_1 \neq 0$ donc $x = f(y) = 0_{\mathbb{R}^n}$.
   Ceci montre l'inclusion $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \subset \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et l'inclusion réciproque est évidente.
   Conclusion : $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}}$.

   De plus $P(f) = 0$, donc $a_1f + \cdots + a_pf^p = 0$ ou encore :
$$f \circ (a_1\mathrm{id} + a_2f + \cdots + a_pf^{p-1}) = 0$$
   On a aussi : $a_1\mathrm{id} + a_2f + \cdots + a_pf^{p-1} \; + \; f \circ (-a_2\mathrm{id} - a_3f - \cdots - a_pf^{p-2}) = a_1\mathrm{id}$.
   Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, puisque $a_1 \neq 0$, :
$$x = \underbrace{\frac{1}{a_1}\big(a_1\mathrm{id} + a_2f + \cdots + a_pf^{p-1})(x)\big)}_{\in \mathrm{Ker}(f)} + \underbrace{\frac{1}{a_1}\big((f \circ (-a_2\mathrm{id} - a_3f - \cdots - a_pf^{p-2}))(x)\big)}_{\in \mathrm{Im}(f)}$$
   Ceci montre l'inclusion $\mathbb{R}^n \subset \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$ et l'inclusion réciproque est évidente.
   Donc $\boxed{\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)}$ et avec ce qui précède : $\boxed{\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f).}$
   (c) Dans 1. on a $P = X(X-1)^2$ et dans 2. $P = X(X-1)(X-4)$ qui vérifient bien $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.