Exercice 1 — On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et on considère l'application $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $f(M) = MA - AM$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. a) Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, calculer $f(M)$ (en fonction de a, b, c et d).

b) Déterminer le noyau de f et donner une base de $\operatorname{Ker} f$.

c) f est-elle injective ?

3. On rappelle que $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ désigne la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (par exemple $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$).

a) Calculer $f(E_{1,1})$, $f(E_{1,2})$, $f(E_{2,1})$ et $f(E_{2,2})$.

b) En déduire une base de l'image de f.

Indication : On rappelle que si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors l'image d'une base de E est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.
Autrement dit, si $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de E, alors $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n))$

Exercice 2 — On désigne par $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. On note f l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ associe le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P) = P'' + X^2 P' - 3X(P - P(0)).$$

1. a) Pour $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{R}_3[X]$, calculer $f(P)$.

b) Montrer que $f : P \mapsto f(P)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. a) En utilisant le calcul de **1a)**, déterminer le noyau de f et donner une base de $\operatorname{Ker} f$.

b) Déterminer une base de l'image de f.