Devoir n°8

lundi 14 mars 2016

Exercice 1 :

On pose $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = t + \arctan t$ et $\forall\, x > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\varphi(t)}$

1) a) Dresser le tableau de variations de φ sur $\mathbb{R}$ puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\varphi(x) = 0$

b) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $F'(x)$ $\forall\, x > 0$

2) a) Montrer que $\forall\, x \geq 0$, $\arctan(2x) \leq 2\,\arctan(x)$

b) En déduire le sens de variations de F sur $]0, +\infty[$

3) a) Montrer que $\forall\, t \geq 0$, $\dfrac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + \dfrac{t^4}{1+t^2}$

b) En déduire $\forall\, x \in [0,1]$, $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \displaystyle\int_0^x \frac{t^4}{1+t^2}\,dt$

En déduire que $\forall\, x \in [0,1]$, $x - \dfrac{x^3}{3} \leq \arctan x \leq x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5}$

c) A l'aide de ce qui précède, montrer que $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$, $-2\,x^3 - \frac{2}{5}\,x^5 \leq \arctan(2x) - 2\,\arctan x \leq 0$

4) a) Montrer que $\forall\, t > 0$, $\dfrac{1}{t + \frac{\pi}{2}} \leq \dfrac{1}{\varphi(t)} \leq \dfrac{1}{t}$

b) En déduire que $\forall\, x > 0$, $\ln\left(\dfrac{2 + \frac{\pi}{2\,x}}{1 + \frac{\pi}{2\,x}}\right) \leq F(x) \leq \ln(2)$

c) Justifier que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x)$ existe et donner sa valeur.

5) a) Montrer que $\forall\, u \in \mathbb{R}$, $1 - u^2 \leq \dfrac{1}{1+u^2} \leq 1$

b) En déduire que $\forall\, t \in]0,1]$, $\dfrac{1}{2t} \leq \dfrac{1}{\varphi(t)} \leq \dfrac{1}{2t - \frac{t^3}{3}}$

c) Montrer que $\forall\, t \in]0,1]$, $\dfrac{1}{6 - t^2} \leq \dfrac{1+t^2}{6}$

d) En déduire que $\forall\, x \in]0, \frac{1}{2}]$, $L \leq F(x) \leq L + \dfrac{3\,x^2}{4}$ (avec L constante à préciser)

e) En déduire $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} F(x)$

6) En utilisant ce qui précède pour créer un encadrement de $F'(x)$ pour $x \in]0,1[$,
montrer que $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} F'(x)$ existe et donner sa valeur.

Exercice 2 : Matrices semi-magiques

On dit qu'une matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$ est semi-magique ssi on obtient un même total lorsqu'on calcule la somme des coefficients de chaque ligne et de chaque colonne de M.

Par exemple, pour $W = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ on a :

Total ligne 1 = -1-1+1=-1 Total colonne 1 = -1+1-1=-1
Total ligne 2 = 1+1-3 =-1 Total colonne 2 = -1+1-1=-1
Total ligne 3 = -1-1+1=-1 Total colonne 3 = 1-3+1=-1

Donc W est semi-magique.

On note $SM_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices semi-magiques de $M_3(\mathbb{R})$.

On admet que $\quad SM_3(\mathbb{R}) = \{ \ M \in \ M_3(\mathbb{R}) \ tq \ J \times M = M \times J \ \} \quad$ où $\ J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On pose $\quad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

et on note $\ G = Vect(\ E_1 \ , \ E_2 \ , \ E_3 \ , \ E_4 \ )$

I. Etude de $SM_3(\mathbb{R})$

1) a) Prouver que $SM_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de E contenant J.
   b) Soit $M \in \ SM_3(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^tM \in \ SM_3(\mathbb{R})$.

2) a) Montrer que $\ E_1 \in \ SM_3(\mathbb{R})$.
   On admet qu'on montrerait de même que $\ \forall \, i \in \ [\![2, 4]\!] \ , \quad E_i \in \ SM_3(\mathbb{R})$.
   En déduire que G est un sous-espace vectoriel de $SM_3(\mathbb{R})$ dont on précisera la dimension.
   b) Montrer que si $M \in \ G$ alors $\ tr(M) = 0$.
   On admet pour la suite que $\ G = \{ \ M \in \ SM_3(\mathbb{R}) \ \text{ tq } \ tr(M) = 0 \ \}$
   c) Montrer que $\ G \cap Vect(J) = \{O_3\}$

3) Soit $M \in \ SM_3(\mathbb{R})$. On pose $N = M - \dfrac{tr(M)}{3} J$.
   Justifier que $N \in \ SM_3(\mathbb{R})$ et calculer $tr(N)$.

4) a) Montrer que $\ SM_3(\mathbb{R}) = G \bigoplus Vect(J)$.
   b) En déduire que $dim[\, SM_3(\mathbb{R})\,] = 5$ et que $\ \{E_1 \ , \ E_2 \ , \ E_3 \ , \ E_4 \ , \ J \ \}$ est une base de $SM_3(\mathbb{R})$.

II. Etude d'un sous espace vectoriel de $SM_3(\mathbb{R})$

Pour $M = (m_{ij})_{ij} \in \ SM_3(\mathbb{R})$, on pose :

$$\varphi(M) = m_{11} + m_{12} + m_{13} \quad \text{ et } \quad \psi(M) = m_{31} + m_{22} + m_{13}$$

On pose $H = \{ \ M \in \ SM_3(\mathbb{R}) \ tq \ \varphi(M) = \psi(M) = tr(M) \ \}$.
On admet que H est un sous espace vectoriel de $SM_3(\mathbb{R})$ avec $\ dim(H) = 3$

1) On pose $\ D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
   a) Déterminer $\ \lambda \in \ \mathbb{R}$ pour que l'on ait $\ D \in \ H$
   b) Justifier que $\ {}^tD \in \ H$.
   c) Montrer que $\ (\ J \ , \ D \ , \ {}^tD \ )\ $ est une base de H

2) On désigne par $S(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et par $A(\mathbb{R})$ celui des matrices anti-symétriques.
   et on pose $G_A = G \cap A(\mathbb{R})$ et $G_S = G \cap S(\mathbb{R})$.

   a) Soit $M \in \ G$.
   On pose $N_1 = (\frac{1}{2}) \, [M +^t M]$ et $N_2 = (\frac{1}{2}) \, [M -^t M]$. Montrer que $\ N_1 \in \ G_S\ $ et que $\ N_2 \in \ G_A$.
   b) Montrer que $\ G = G_S \bigoplus G_A$

3) a) Soit M une matrice anti-symétrique avec $M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix}$ où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

Montrer que, si $M \in G_A$ alors $M \in Vect(E_1)$.

b) En déduire une base de G_A.

4) Déterminer une base de G_S.

Exercice 3 :

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-x \ln(1+t^2)}\, dt$ et $g(x) = -\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\, e^{-x \ln(1+t^2)}\, dt$

1) Prouver que f et g sont définies sur $\mathbb{R}$.

2) On admet dans cette question que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$

a) Donner le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire, à l'aide du théorème sur les limites d'une fonction monotone, que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$ existe. Dans la suite, on note $L = \displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$

3) a) Soit $x < 0$. Montrer que $\forall\, t \in [\frac{1}{2}, 1]$ $e^{-x \ln(1+t^2)} \geq e^{-x \ln(\frac{5}{4})}$

b) En déduire que $\forall\, x < 0$ $f(x) \geq \dfrac{1}{2} e^{-x \ln(\frac{5}{4})}$. Déterminer alors $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ (on a donc $\varepsilon \in]0, 1[$)

Montrer que $\forall\, x > 0$ $\displaystyle\int_\varepsilon^1 e^{-x \ln(1+t^2)}\, dt \leq e^{-x \ln(1+\varepsilon^2)}$

En déduire que $\forall\, x > 0$, $f(x) \leq \varepsilon + e^{-x \ln(1+\varepsilon^2)}$

b) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq L \leq \dfrac{1}{n}$. En déduire que $L = \displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

5) Dans cette question, on démontre le résultat admis au 2)

a) A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que :

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|e^x - 1 - x| \leq \dfrac{x^2}{2} e^{|x|}$ (on distinguera l'étude des cas $x \geq 0$ et $x < 0$)

b) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $h \in \mathbb{R}$ tq $|h| < 1$. Montrer que :

$$|\, f(x_0 + h) - f(x_0) - h\, g(x_0)\, | \leq h^2 K$$

avec K défini par : $K = \displaystyle\int_0^1 \left[\ln(1+t^2)\right]^2 e^{-x_0 \ln(1+t^2)}\, dt$

c) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(x_0)$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$